

# РЕАЛЕН АНАЛИЗ

Интегрално смятане на функция на една променлива  
с използване на Алгебрични компютърни системи

Боян Златанов



Пловдивски Университет „Паисий Хилендарски“

Факултет по Математика и информатика

2018

## Предговор

Втора част на курса по Математически анализ включва теория на интеграла на функция на една променлива. Включени са класическите раздели от анализа: неопределен интеграл и методи за неговото пресмятане; определен (Риманов) интеграл; несобствен интеграл; приложения на определения интеграл в анализа, геометрията и физиката.

Предлаганите лекционни записки са написани въз основа на четените от автора лекции по Математически анализ – Диференциално смятане на функция на една променлива пред студенти от специалностите „Математика“, „Приложна математика“, „Софтуерни технологии и дизайн“, „Информатика“, „Софтуерно инженерство“ във факултета по Математика и информатика, специалностите „Физика и математика“, „Инженерна физика“ във факултета по Физика и специалностите „Математика и информатика“, „Информационни технологии, математика и образователен мениджмънт“ във филиала в град Смолян на Пловдивския университет “Паисий Хилендарски“. Лекционните записки са част от учебните помагала по проекта BG051PO001-4.3.04-0064 „Пловдивски електронен университет (ПеУ): национален еталон за провеждане на качествено е-обучение в системата на висшето образование“. В интернет страницата на „Пловдивски електронен университет“ са включени също така тестове по всяка тема и файлове с кода на *Maple*, които илюстрират прилагането на компютър за решаване на задачи по Математически анализ.

Четири основни елемента присъстват в лекционните записки: пълно излагане на основните резултати по Математически анализ – интегрално смятане на функция на една променлива; илюстрация на определенията и теоремите с примери и чертежи; използване на компютър за решаване на задачи; представяне на кратка биография на математиците, допринесли за всеки един от изучаваните резултати в курса.

При излагането на теорията сме се постарали да разгледаме всички най-съществени понятия и твърдения от Математическия анализ – интегрално смятане на функция на една променлива. Илюстрирали сме понятията и твърденията както с лесни примери, така и с по-сложни примери. Демонстрирали сме приложение на теоремите в задачи от други клонове на естествените и природните науки. Чертежите са изработени или на *Maple* или на *GeoGebra*. Динамичната среда на GeoGebra позволява да илюстрираме примерите, в които има динамика. Развитието на Алгебричните компютърни системи (ACS) позволява да се извършват сложни и трудоемки математически пресмятания с помощта на компютър. Ето защо в настоящите лекционни записки сме демонстрирали възможностите на ACS за решаване на задачи по математически анализ. Запознаваме студентите с вградените в ACS функции, които дават крайни резултати на поставените задачи по математически анализ. Дефинираме процедури в *Maple*, които следват стъпка по стъпка пресмятанията, които би трябвало да се извършат на ръка. Това ни позволи да включим сложни примери, за които не би имало време да бъдат разгледани в часовете по Математически анализ.

Доколкото е известно на автора първи елементи в използването на компютър при преподаване на реален анализ има в учебника на R. Wilson - „Much Ado about Calculus - A Modern Treatment with Applications Prepared for Use with the Computer“, където се използват езиците FORTRAN или BASIC и в учебника на В. Ильин, В. Садовничий, Бл.

Сендов „Математически анализ - начальный курс“, където се използва езика ALGOL за решаване на отделни задачи. Развитието на Алгебричните компютърни системи позволява да се разшири множеството от задачи, които могат да бъдат решавани и с помощта на компютър.

При създаването на Лекционния курс сме използвали основно четири учебника: М. Фихтенголец „Курс дифференциального и интегрального исчисления в 3 тома“, В. Илин, В. Садовничи, Бл. Сендов „Математически анализ в 2 тома.“, П. Джаков, Р. Леви, Р. Малеев, Ст. Троянски „Дифференциално и интегрално смятане“ и Ст. Банах „Дифференциальное и интегральное исчисление“. Разработихме този лекционен курс, за да обогатим вече споменатите учебници с използването на ACS при изучаването на Математически анализ.

# Съдържание

<b>1</b>	<b>Неопределен интеграл</b>	<b>4</b>
1.1	Неопределен интеграл . . . . .	4
1.2	Интегриране чрез субституции . . . . .	9
1.3	Интегриране по части . . . . .	13
1.4	Интегриране на рационални функции . . . . .	18
1.5	Интегриране на ирационални функции . . . . .	27
1.6	Интегриране на диференциален бином . . . . .	32
1.7	Субституции на Ойлер . . . . .	36
1.8	Интегриране на тригонометрични функции. . . . .	40
<b>2</b>	<b>Определен интеграл</b>	<b>43</b>
2.1	Суми на Риман. . . . .	44
2.2	Голяма и малка суми на Дарбу . . . . .	49
2.3	Класове интегрируеми функции . . . . .	56
2.4	Пресмятане на определени интегрални чрез интегралните суми . . . . .	59
2.5	Свойства на определения интеграл . . . . .	62
2.6	Определеният интеграл като функция на горната си граница . . . . .	67
2.7	Формула на Лайбниц–Нютон . . . . .	70
2.8	Приложение на формулите за средните стойности и формулата на Лайбниц–Нютон . . . . .	72
2.9	Интегриране по части . . . . .	76
2.10	Интегриране чрез смяна на променливите . . . . .	77
<b>3</b>	<b>Несобствени интегрални</b>	<b>80</b>
3.1	Несобствени интегрални с безкрайни граници . . . . .	81
3.2	Свойства на сходящите несобствени интегрални от първи род. . . . .	84
3.3	Критерии за сходимост на несобствени интегрални от първи род . . . . .	86
3.4	Смяна на променливите и интегриране по части в несобствения интеграл . . . . .	92
3.5	Несобствени интегрални от втори род . . . . .	94
<b>4</b>	<b>Приложение на определения интеграл в математическия анализ</b>	<b>102</b>
4.1	Приближено пресмятане на числото $\pi$ . . . . .	102
4.2	Интегрален вид на остатъчния член във формулата на Тейлор . . . . .	106
4.3	Трансцендентност на числото $e$ . . . . .	108
<b>5</b>	<b>Приложение на определения интеграл в геометрията</b>	<b>110</b>
5.1	Дължина на крива . . . . .	110
5.2	Лице на криволинеен трапец . . . . .	113
5.3	Обем на ротационно тяло . . . . .	117
5.4	Околна повърхнина на ротационно тяло . . . . .	119

<b>6</b>	<b>Приложение на определения интеграл във физиката</b>	<b>122</b>
6.1	Статичен момент и център на тежестта на крива . . . . .	122
6.2	Статичен момент и център на тежестта на криволинеен трапец . . . . .	124
6.3	Хидростатично налягане . . . . .	127
6.4	Количество изтичаща вода през шлюз на язовирна стена . . . . .	128
6.5	Консуматорски излишък . . . . .	129
6.6	Кръвен поток . . . . .	129

## Въведение

Да разгледаме задачите: да се намери приближена стойност на числото  $\pi$ , да се докаже, че неперовото число  $e$  е трансцендентно т.е. не е корен на полином с цели коефициенти, да се намери дължината на крива, да се пресметне изминатият път на падащо тяло, да се намери центърът на тежестта на плоска фигура, да се намери количеството изтичаща вода през шлюз на язовирна стена. Всички изредени задачи изглеждат различни, но тяхното решаване изисква едни и същи методи. Тези методи са методите на интегралното смятане на функция на една променлива.

## 1 Неопределен интеграл

Много задачи от науката и техниката с свеждат не до намиране на производната на дадена функция, а от производната на функцията да се намери самата функция, която описва изследвания модел. Например, ако е известно ускорението на материална точка като функция на времето  $t$ , да се намери скоростта и изминатия път за време  $t$ .

### 1.1 Неопределен интеграл

Ще се уговорим в този параграф да означаваме с  $\Delta$  произволен вид интервал - отворен, затворен, полуотворен, краен или безкраен.

**Определение 1.1** Казваме, че функцията  $F$  е примитивна на функцията  $f$  в интервала  $\Delta$ , ако  $F'(x) = f(x)$  за всяко  $x \in \Delta$ .

**Пример 1.1** Функцията  $\sin(x)$  е примитивна на функцията  $\cos(x)$  в  $\mathbb{R}$ .

Наистина, от равенството  $(\sin(x))' = \cos(x)$  за всяко  $x \in \mathbb{R}$  следва, че функцията  $\sin(x)$  е примитивна на функцията  $\cos(x)$  в  $\mathbb{R}$ .

Нека отбележим, че функцията  $\sin(x) + 1$  също е примитивна на функцията  $\cos(x)$  в  $\mathbb{R}$ . Този пример показва, че примитивната на функция не е единствена.

**Пример 1.2** Функцията  $\sqrt{1-x^2}$  е примитивна на функцията  $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$  в интервала  $(-1, 1)$ .

Наистина, от равенството  $(\sqrt{1-x^2})' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$  за всяко  $x \in (-1, 1)$  следва, че функцията  $\sqrt{1-x^2}$  е примитивна на функцията  $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$  в  $(-1, 1)$ .

Командата  $\text{int}(f(x), x)$  намира една от примитивните на функцията  $f$ . Вторият параметър  $x$  показва спрямо коя променлива примитивната е диференцирана

$\text{int}(\sin x, x);$

$\cos x;$

$$\int \left( \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} dx \right);$$
$$-\frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{1-x^2}};$$

Ако използваме командата  $\text{simplify}$ , ще получим

$$\text{simplify} \left( \int \left( \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} dx \right) \right);$$
$$\sqrt{1-x^2}.$$

**Твърдение 1.1** Две функции  $F(x)$  и  $G(x)$  са примитивни на една и съща функция в интервала  $\Delta$  тогава и само тогава, когато  $F(x) = G(x) + C$ , за някоя константа  $C \in \mathbb{R}$ .

**Доказателство:** Ако е в сила равенството  $F(x) = G(x) + C$ , за някоя константа  $C \in \mathbb{R}$ , тогава  $F'(x) = (G(x) + C)' = G'(x)$  и следователно  $F(x)$  и  $G(x)$  са примитивни на една и съща функция.

Нека сега  $F(x)$  и  $G(x)$  са примитивни на една и съща функция, т.е.  $F'(x) = G'(x)$ . Следователно  $(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = 0$  за всяко  $x \in \Delta$ . Според критерият за константност съществува  $C \in \mathbb{R}$ , така че  $(F(x) - G(x)) = C$  за всяко  $x \in \Delta$ .  $\square$

**Определение 1.2** Съвкупността от всички примитивни функции  $F$  на функцията  $f$  наричаме неопределен интеграл и означаваме с  $\int f(x)dx$ .

**Пример 1.3** Да се пресметне  $\int x^2 dx$ .

Лесно се съобразява, че функцията  $F(x) = \frac{x^3}{3}$  е примитивна за функцията  $x^2$ . Тогава според Твърдение 1.1 всички примитивни на  $x^2$  имат вида  $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$ .

Обръщаме внимание, че под знака за интегриране  $\int$  стои диференциала на примитивната функция, а не нейната производна. Така в Пример 1.3 пишем  $x^2 dx$ , а не  $x^2$ . Този запис предоставя редица преимущества и затова се е съхранил. Можем да намираме примитивна на функция в *Maple* освен с командата  $\text{int}(f(x), x)$  и със символния запис  $\int f(x)dx$ .

**Твърдение 1.2** В сила са тъждествата:

- 1)  $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$ ;
- 2)  $\int d(F(x)) = F(x) + C$ .

Обръщаме внимание, че под символа  $d\left(\int f(x)dx\right)$  разбираме диференциала на която и да е функция от множеството  $\int f(x)dx$ .

От таблицата с основните производни веднага можем да напишем таблица с основните неопределени интеграли:



$$\begin{array}{ll}
1. \int 0 \cdot dx = C & 2. \int dx = x + C \\
3. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ за } n \neq -1 & 4. \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C \\
5. \int e^x dx = e^x + C & \\
6. \int \sin(x) dx = -\cos(x) + C & 7. \int \cos(x) dx = \sin(x) + C \\
8. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cotg(x) + C & 9. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tg(x) + C \\
10. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C & 11. \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg(x) + C
\end{array}$$

Интегралите от горната таблица се наричат още таблични интеграли.

Ще обърнем внимание на формула 4.  $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$ .

- 1) Ако  $x > 0$  то  $(\ln |x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$ .  
2) Ако  $x < 0$  то  $(\ln |x|)' = (\ln(-x))' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$ .

Следователно е в сила равенството

$$\int \frac{dx}{x} = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0. \end{cases}$$

**Пример 1.4** Нека материална точка пада свободно, т.е. движи се с ускорение  $g$ . Намерете скоростта и изминатият път от материалната точка, ако е известно, че в момента  $t_0$  материалната точка има скорост  $v_0$  и е изминала път  $s_0$ .

Знаем, че ускорението е производната на скоростта, а скоростта е производната на изминатия път. Следователно скоростта е примитивна функция на ускорението, а изминатият път е примитивна функция на скоростта. Тогава  $v(t) = \int g dt = gt + C_0$  и  $s(t) = \int (gt + C_0) dt = \frac{gt^2}{2} + C_0 t + C_1$ . От условието, че материалната точка има скорост  $v_0$  в момента  $t_0$  получаваме уравнението:  $gt_0 + C_0 = v_0$ . Аналогично от условието, че материалната точка е изминала път  $s_0$  в момента  $t_0$  получаваме уравнението:  $\frac{gt_0^2}{2} + C_0 t_0 + C_1 = s_0$ . Решаваме системата

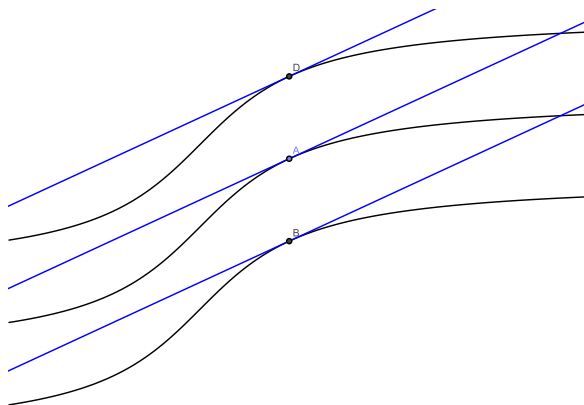
$$\left| \begin{array}{rcl} gt_0 + C_0 & = & v_0 \\ \frac{gt_0^2}{2} + C_0 t_0 + C_1 & = & s_0 \end{array} \right.$$

и получаваме  $C_0 = -gt_0 + v_0$ ,  $C_1 = \frac{gt_0^2}{2} - t_0v_0 + s_0$ . Следователно скоростта на материалната точка е  $v(t) = gt - gt_0 + v_0$ , а изминатия от нея път е  $s(t) = \frac{gt^2}{2} + (v_0 - gt_0)t + \frac{gt_0^2}{2} - t_0v_0 + s_0$ .

Знаем, че производната на функцията  $F$  във всяка точка представлява ъгловият коефициент на допирателната в дадената точка към кривата  $(x, F(x))$ .

**Пример 1.5** Нека  $f$  описва ъгловия коефициент на допирателните във всяка една точка от кривата  $(x, F(x))$ . Намерете кривата  $F$ .

Нека  $F$  е примитивна на  $f$ . Съвкупността от всички примитивни  $F(x) + C$  на  $f$  удовлетворява поставената задача. Ако допълнително е дадено, че кривата преминава през точката  $(x_0, y_0)$ , то определяме  $C$  от уравнението  $F(x_0) + C = y_0$ .



Фигура 1: Допирателна към крива

**Твърдение 1.3** (Основни правила за интегриране)

$$1) \int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$2) \int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$$

**Доказателство:** 1) От правилата за диференциране получаваме тъждеството

$$d\left(\int f(x)dx \pm \int g(x)dx\right) = d\left(\int f(x)dx\right) \pm d\left(\int g(x)dx\right) = (f(x) \pm g(x)) dx.$$

Следователно множествата от примитивни функции от лявата страна в 1) и от дясната страна в 1) съвпадат.

2) Нека  $\alpha$  е константа. Тогава от правилата за диференциране получаваме тъждеството

$$d\left(\alpha \int f(x)dx\right) = \alpha d\left(\int f(x)dx\right) = \alpha f(x)dx.$$

Следователно множествата от примитивни функции от лявата страна в 2) и от дясната страна в 2) съвпадат.  $\square$

**Пример 1.6** Пресметнете интеграла  $\int (3x^6 - 2x + 8)dx$ .

$$\int (3x^6 - 2x + 8)dx = 3 \int x^6 dx - 2 \int x dx + 8 \int dx = \frac{3x^7}{7} - x^2 + 8x + C.$$

**Пример 1.7** Пресметнете интеграла  $\int (x^4 - 3\sqrt{x} + 2\frac{1}{x^3})dx$ .

$$\begin{aligned} \int (x^4 - 3\sqrt{x} + 2\frac{1}{x^3})dx &= \int x^4 dx - 3 \int x^{1/2} dx + 2 \int x^{-3} dx \\ &= \frac{x^{4+1}}{4+1} - 3 \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 2 \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C \\ &= \frac{x^5}{5} - 2x^{\frac{3}{2}} - x^{-2} + C. \end{aligned}$$

Командите в *Maple*  $Expand(I)$  и  $Combine(I)$  от пакета *IntegrationTools* преобразуват интеграли с помощта на Твърдение 1.3.

*with(IntegrationTools) :*

*Expand*  $\left(\int (af(x) + bg(x))dx\right);$

$a \int f(x)dx + b \int g(x)dx$

*Combine*  $\left(a \int f(x)dx + b \int g(x)dx\right);$

$\int (af(x) + bg(x))dx$

Ще илюстрираме как с помощта на *Maple* се пресмята интеграла от Пример 1.7:

$$\int \left(x^4 - 3\sqrt{x} + 2\frac{1}{x^3}\right) dx;$$

$$\frac{x^5}{5} - 2x^{\frac{3}{2}} - x^{-2}$$

**Пример 1.8** Пресметнете интеграла  $\int \frac{x^5 - x^4 + 2x^3}{x} dx$ .

$$\int \frac{x^5 - x^4 + 2x^3}{x} dx = \int (x^4 - x^3 + 2x^2) dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + C.$$

**Пример 1.9** Пресметнете интеграла  $\int x\sqrt[7]{x^5} dx$ .

$$\int x\sqrt[7]{x^5} dx = \int x^{1+\frac{5}{7}} dx = \int x^{\frac{12}{7}} dx = \frac{x^{\frac{19}{7}}}{\frac{19}{7}} + c = \frac{7}{19} x^{\frac{19}{7}} + C.$$

**Пример 1.10** Пресметнете интеграла  $\int (2x+1)^2 dx$ .

$$\int (2x+1)^2 dx = \int (4x^2 + 4x + 1) dx = 4\frac{x^3}{3} + 2x^2 + x + C.$$

ЗАДАЧИ:

1) Пресметнете интегралите:

а)  $\int (2 - 3\sqrt{x})^2 dx$ ; б)  $\int \left( \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}} \right) dx$ ; в)  $\int \left( \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right) dx$ ;

г)  $\int (\sin(x) + 2e^x)^2 dx$ ; д)  $\int \left( \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$ ; е)  $\int \left( \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{2}{\cos^2 x} \right) dx$ ;

## 1.2 Интегриране чрез субституции

**Теорема 1.1** Ако  $\int f(x) dx = F(x) + C$ , то

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(\varphi(t))d(\varphi(t)) = F(\varphi(t)) + C.$$

**Доказателство:** След диференциране получаваме тъждеството

$$d(F(\varphi(t))) = F'(\varphi(t))\varphi'(t)dt = f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

и следователно функцията  $F(\varphi(t))$  е примитивна на  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ . □

Твърдение 1.1 се използва, когато има трудности при пресмятане на  $\int f(x) dx$ . С помощта на полагане  $x = \varphi(t)$  получаваме  $f(x)dx = f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ , за да достигнем до интеграл  $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = G(t) + C$ , който се пресмята по-лесно. Тогава

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = G(t) + C = G(\varphi^{-1}(x)) + C.$$

**Пример 1.11** Пресметнете интеграла  $\int \cot g x dx$ .

Полагаме  $t = \sin x$ . Пресмятаме  $x = \arcsin t$ ,  $dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ ,  $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-t^2}$  и замества

$$\int \cotg x = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |\sin x| + C.$$

При интегриране чрез субституции много полезна е таблицата с основните диференциали, наричана още „Таблица за внасяне под знака на диференциала“.

- |   |                                       |
|---|---------------------------------------|
| 1. $x^n dx = \frac{1}{n+1} d(x^{n+1})$ , за $n \neq -1$ |                                       |
| 2. $\frac{dx}{x} = d(\ln  x )$                          | 3. $e^x dx = d(e^x)$                  |
| 4. $\sin(x) dx = -d(\cos x)$                            | 5. $\cos(x) dx = d(\sin x)$           |
| 6. $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\cotg x)$                  | 7. $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\tg x)$   |
| 8. $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x)$             | 9. $\frac{dx}{1+x^2} = d(\arctg x)$ . |

Можем формално да замества  $\varphi'(x)dx$  с  $d(\varphi(x))$ . След това полагаме  $\varphi(x) = t$  и прилагаме Теорема 1.1.

Да пресметнем интеграла от Пример 1.11. Преобразуваме интеграла

$$\int \cotg x = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x}$$

Полагаме  $t = \sin x$  и получаваме  $\int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |\sin x| + C$ .

Този частен случай на пресмятане на интеграл с помощта на субституции се нарича пресмятане на интеграл чрез внасяне под знака на диференциала, поради използваното преобразование  $\varphi' dx = d\varphi$ .

**Пример 1.12** Пресметнете интеграла  $\int e^{x^3} x^2 dx$ .

След внасяне под знака на диференциала и полагане  $t = x^3$  получаваме:

$$\int e^{x^3} x^2 dx = \int \frac{e^{x^3}}{3} dx^3 = \frac{1}{3} e^{x^3} + C.$$

**Пример 1.13** Пресметнете интеграла  $\int \sin(2x) dx$ .

Полагаме  $x = \frac{t}{2}$  и заместваме.

$$\int \sin(2x)dx = \int \frac{\sin(t)}{2}dt = \frac{-\cos(t)}{2} + C = \frac{-\cos(2x)}{2} + C.$$

**Пример 1.14** Пресметнете интеграла  $\int \cos(x-2)dx$ .

Полагаме  $x = t + 2$  и заместваме.

$$\int \cos(x-2)dx = \int \cos t dt = \sin t + C = \sin(x-2) + C.$$

**Пример 1.15** Пресметнете интеграла  $\int \frac{1}{\cos^2(3x+1)}dx$ .

Полагаме  $x = \frac{t-1}{3}$  и заместваме.

$$\int \frac{dx}{\cos^2(3x+1)} = \int \frac{dt}{3\cos^2 t} = \frac{\operatorname{tg} t}{3} + C = \frac{\operatorname{tg}(3x+1)}{3} + C.$$

Ще отбележим, че когато пресмятаме с помощта на смяна на променливите с полагането  $\alpha x + \beta = t$  можем да използваме тъждествата:

1)  $dx = d(x + \beta);$

2)  $dx = \frac{d(\alpha x)}{\alpha};$

3)  $dx = \frac{d(\alpha x + \beta)}{\alpha}.$

Нека да пресметнем с помощта на тъждествата 1)–3) интеграла от Пример 1.15.

$$\int \frac{dx}{\cos^2(3x+1)} = \int \frac{d(3x)}{3\cos^2(3x+1)} = \frac{1}{3} \int \frac{d(3x+1)}{\cos^2(3x+1)} = \frac{\operatorname{tg}(3x+1)}{3} + C.$$

**Пример 1.16** Пресметнете  $\int \frac{dx}{\sin x}$ .

Преобразуваме функцията  $\sin$ , внасяме под знака на диференциала и пресмятаме

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{dx}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2} \int \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) dx}{\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \int \frac{d\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)} = \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \right| + C. \end{aligned}$$

**Пример 1.17** Пресметнете интеграла  $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx$ .

Изнасяме  $a^2$  пред скоба и получаваме.

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{a}{a^2} \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

**Пример 1.18** Пресметнете интеграла  $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})}$ .

Полагаме  $x = t^6$ . Пресмятаме  $\sqrt{x} = t^3$ ,  $\sqrt[3]{x} = t^2$ ,  $dx = 6t^5 dt$  и заместваме

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})} &= 6 \int \frac{t^2 dt}{1 + t^2} = 6 \int \frac{t^2 + 1 - 1}{1 + t^2} dt = 6 \left( \int dt - \int \frac{dt}{1 + t^2} \right) \\ &= 6(t - \operatorname{arctg} t) + C = 6 \left( \sqrt[6]{x} - \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} \right) + C. \end{aligned}$$

**Пример 1.19** Пресметнете интеграла  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ .

Полагаме  $x = a \sin t$ . Пресмятаме  $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} = a \cos t$ ,  $dx = a \cos t dt$  и заместваме

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= a^2 \int \cos^2 t dt = a^2 \int \frac{\cos(2t) + 1}{2} dt = a^2 \left( \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right) + C \\ &= a^2 \left( \frac{\arcsin \left(\frac{x}{a}\right)}{2} + \frac{\sin \left(2 \arcsin \left(\frac{x}{a}\right)\right)}{4} \right) + C. \end{aligned}$$

**Пример 1.20** Пресметнете интеграла  $\int \frac{x^2}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}} dx$ .

Полагаме  $x = a \operatorname{tg} t$ . Пресмятаме  $\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2(1 + \operatorname{tg}^2 t)} = \frac{a}{\cos t}$ ,  $dx = \frac{adt}{\cos^2 t}$ .

Използваме Пример 1.16 и получаваме

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}} dx &= \int \frac{a^3 \operatorname{tg}^2 t \cos^3 t dt}{a^3 \cos^2 t} = \int \frac{\sin^2 t}{\cos t} dt = \int \frac{1 - \cos^2 t}{\cos t} dt \\ &= \int \frac{1}{\cos t} dt - \int \cos t dt = \int \frac{1}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - t\right)} dt - \int \cos t dt \\ &= -\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right) \right| - \sin t + C \\ &= -\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\operatorname{arctg}(x/a)}{2}\right) \right| - \sin(\operatorname{arctg}(x/a)) + C. \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ:

1) Пресметнете интегралите:

а)  $\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot (1 + \operatorname{tg} x)}$ ; б)  $\int e^x \cos(e^x) dx$ ; в)  $\int \frac{x^4}{\sqrt{3+x^5}} dx$ ;

г)  $\int \frac{x}{1+x^4} dx$ ; д)  $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$ ; е)  $\int \frac{\cos x}{1+\cos^2 x} dx$ ;

2) Пресметнете интегралите:

а)  $\int \frac{e^x + 1}{e^x - 1} dx$ ; б)  $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx$ ; в)  $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$ ; г)  $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$ ; д)  $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx$ ;

### 1.3 Интегриране по части

**Теорема 1.2** (Интегриране по части) Ако функциите  $f$  и  $g$  имат непрекъснати първи производни, то в сила е тъждеството

$$(1) \quad \int f(x) dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x) df(x),$$

когато интегралите, които участват в (1), съществуват.

**Доказателство:** От равенството

$$d(f(x)g(x)) = (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx.$$

следва, че  $f(x)g(x)$  е примитивна на функцията  $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ . □

Формула (1) може да се запише в еквивалентен вид

$$\int F(x) \cdot g(x) dx = F(x) \cdot G(x) - \int G(x) dF(x) = F(x) \cdot G(x) - \int G(x) \cdot f(x) dx,$$

където  $F$  е примитивна на  $f$  и  $G$  е примитивна на  $g$ .

**Пример 1.21** Пресметнете  $\int x \cos(x) dx$

След внасяне под диференциала на  $\cos x$  прилагаме Теорема 1.2

$$\int x \cos(x) dx = \int x d(\sin x) = x \sin(x) - \int \sin(x) dx = x \sin(x) + \cos(x) + C.$$

Целта при интегрирането по части е да получим за пресмятане „по-прост“ интеграл или интеграл, който не е „по-сложен“ от първоначалния. Ако се опитаме да внесем



под знака на диференциала  $x$ , то след прилагане на Теорема 1.2 ще получим по-сложен интеграл:

$$\int x \cos(x) dx = \frac{1}{2} \int \cos(x) dx^2 = \frac{1}{2} \left( x^2 \cos(x) + \int x^2 \sin(x) dx \right) = \frac{x^2 \cos(x)}{2} - \frac{1}{2} \int x^2 \sin(x) dx.$$

**Пример 1.22** Пресметнете интеграла  $\int x^4 \ln x dx$ .

Внасяме  $x^4$  под знака на диференциала и прилагаме Теорема 1.2

$$\begin{aligned} \int x^4 \ln x dx &= \frac{1}{5} \int \ln x d(x^5) = \frac{1}{5} \left( x^5 \ln x - \int x^5 d(\ln x) \right) \\ &= \frac{1}{5} \left( x^5 \ln x - \int \frac{x^5}{x} dx \right) = \frac{1}{5} \left( x^5 \ln x - \frac{x^5}{5} \right) + C \end{aligned}$$

Нека отбележим, че за разлика от производна на функция, където имаме таблица с производните на основните елементарни функции, то при интегралите не знаем кои са примитивните на елементарните функции  $\ln(x)$ ,  $\arctg(x)$ ,  $\operatorname{arccotg}(x)$ .

**Пример 1.23** Пресметнете  $\int \ln x dx$

Съгласно Теорема 1.2, приложена за функциите  $f(x) = \ln x$  и  $g(x) = x$  получаваме:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x d(\ln x) = x \ln x - \int \frac{x dx}{x} = x \ln x - x + C.$$

**Пример 1.24** Пресметнете интеграла  $\int \arctg x dx$ .

Съгласно Теорема 1.2, приложена за функциите  $f(x) = \arctg x$  и  $g(x) = x$  получаваме:

$$\begin{aligned} \int \arctg x dx &= x \arctg x - \int x d(\arctg x) = x \arctg x - \int \frac{x dx}{1+x^2} \\ &= x \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{1+x^2} = x \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} \\ &= x \arctg x - \ln(1+x^2) + C. \end{aligned}$$

Възможно е след прилагане на Теоремата за интегриране по части да не получим табличен интеграл. Ако интегралът, който трябва да пресметнем, е по-лесен от първоначалния, то е възможно с още няколко прилагания на Теоремата за интегриране по части да достигнем до табличен интеграл.

**Пример 1.25** Пресметнете интеграла  $\int x^2 e^x dx$ .

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x dx &= \int x^2 de^x = x^2 e^x - \int e^x d(x^2) = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x de^x \\ &= x^2 e^x - 2 \left( x e^x - \int e^x dx \right) = x^2 e^x - 2 x e^x + 2 e^x + C.\end{aligned}$$

От Пример 1.25 съобразяваме, че интегралът  $\int x^n e^x dx$  се пресмята след като приложим Теоремата за интегриране по части  $n$  пъти. *Maple* лесно извършва такива продължителни пресмятания.

$$\int x^{10} \cdot \exp(x) dx;$$

$$(3628800 - 3628800x + 1814400x^2 - 604800x^3 + 151200x^4 - 30240x^5 + 5040x^6 - 720x^7 + 90x^8 - 10x^9 + x^{10})e^x$$

**Пример 1.26** Пресметнете интеграла  $\int e^x \sin x dx$ .

Прилагаме Теоремата за интегриране по части два пъти и получаваме

$$\begin{aligned}\int e^x \sin x dx &= \int \sin x de^x = e^x \sin x - \int e^x d(\sin x) = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \\ (2) \quad &= e^x \sin x - \int \cos x de^x = e^x \sin x - \left( e^x \cos x - \int e^x d(\cos x) \right) \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x - \int \sin x e^x dx.\end{aligned}$$

Забелязваме, че (2) е уравнение спрямо  $\int e^x \sin x dx$

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$$

и следователно

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x) + C.$$

Последният пример илюстрира забележката, че е възможно да пресмятаме интегралите с помощта на формулата за интегриране по части, когато след първото интегриране получим интеграл, който не е „по-сложен“ от първоначалния.

Формулата за интегриране по части може да се използва и за получаване на рекурентна връзка за пресмятане на интегралите.

**Пример 1.27** Да се намери рекурентна формула за пресмятане на интеграла

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}.$$

След интегриране по части получаваме тъждеството

$$\begin{aligned}
J_n &= \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} - \int x d\left(\frac{1}{(x^2 + a^2)^n}\right) \\
&= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx \\
&= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx \\
&= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx - 2n \int \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx \\
&= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n J_n - 2na^2 J_{n+1}.
\end{aligned}$$

Следователно в сила е рекурентната връзка

$$(3) \quad J_{n+1} = \frac{x}{2na^2(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} J_n.$$

Формула (3) може да се използва за последователно намиране на интегралите  $J_1, J_2, \dots$

Интегралът  $J_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \operatorname{arctg} x + C$  е табличен интеграл. Тогава

$$J_2 = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{x}{4a^2(x^2 + a^2)^2} + \frac{3 \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a}\right)}{4a^3}.$$

*Maple* дава възможност за лесно и бързо пресмятане на интеграли, в които има рекурентна връзка.

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^5} dx;$$

$$\frac{x}{8(1+x^2)^4} + \frac{7x}{48(1+x^2)^3} + \frac{35x}{192(1+x^2)^2} + \frac{35x}{128(1+x^2)} + \frac{35 \operatorname{arctg} x}{128}.$$

Можем да дефинираме рекурентна процедура в *Maple* и да пресметнем интеграла за произволно  $n$ .

$f := \text{proc}(n, a)$

$\text{if } 1 < n \text{ then } \frac{x}{2 \cdot n \cdot a^2 \cdot (x^2 + a^2)^n} + \frac{2 \cdot n - 1}{2 \cdot n \cdot a^2} \cdot \text{thisproc}(n - 1, a)$

$\text{else } \frac{\arctan\left(\frac{x}{a}\right)}{a}$

$\text{end if}$

$\text{end proc};$

$f(5, 1);$

$$\frac{x}{8(1+x^2)^4} + \frac{7x}{48(1+x^2)^3} + \frac{35x}{192(1+x^2)^2} + \frac{35x}{128(1+x^2)} + \frac{35 \operatorname{arctg} x}{128}.$$

Пакетът *IntegrationTools* включва процедура *Parts*, която прилага формулата за интегриране по части. Процедурата *Parts(I, f)* има две променливи: *I* е неопределен интеграл, към който трябва да се приложи формулата за интегриране по части; *f* е функцията, която не внасяме под знака на диференциала, т.е.

$$\int f(x)g'(x)dx = \int f(x)dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)df(x).$$

$\text{with}(\text{IntegrationTools}) :$

Дефинираме интеграла:

$$T := \int x^2 \cdot \sin(x) dx$$

Внасяме под знака на диференциала  $\sin x$ ,  $x^2$  и  $x \sin x$ :

$\text{Parts}(T, x^2); \text{Parts}(T, \sin(x)); \text{Parts}(T, x \sin(x));$

И получаваме.

$$-x^2 \cos(x) + 2 \int x \cos(x) dx, \frac{x^3 \sin x}{3} - \int \frac{x^3 \cos x}{3} dx, x \sin(x) - x^2 \cos(x) - \int (\sin x - x \cos x) dx.$$

С командата *Simplify* можем да опростяваме получените интегралите.

ЗАДАЧИ:

1) Пресметнете интегралите:

а)  $\int x \cos^2 x dx$ ; б)  $\int x \sin^3 x dx$ ; в)  $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$ ; г)  $\int \ln^2 x dx$ ; д)  $\int x^2 \ln(1+x) dx$ ;

е)  $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$ ; ж)  $\int \arcsin x dx$ ; з)  $\int x \operatorname{arctg} x dx$ ; и)  $\int x^2 \operatorname{arctg} x$ .

2) Пресметнете интегралите:

$$\text{а) } \int \sin(\ln x) dx; \quad \text{б) } \int \sqrt{x^2 + 3} dx; \quad \text{в) } \int \sqrt{2 - x^2} dx; \quad \text{г) } \int \cos^2(\ln x) dx.$$

3) Намерете рекурентна формула за интегралите:

$$\text{а) } I_n = \int \ln^n x dx; \quad \text{б) } I_n = \int x^a \ln^n x dx; \quad \text{в) } I_n = \int x^n e^n dx; \quad \text{г) } I_n = \int e^x \sin^n x dx;$$

$$\text{д) } I_n = \int \operatorname{tg}^n x dx; \quad \text{е) } I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}; \quad \text{ж) } I_n = \int (a^2 - x^2)^n dx; \quad \text{з) } I_{n,m} = \int \frac{\sin^n x}{\cos^m x} dx.$$

#### 1.4 Интегриране на рационални функции

Нека  $P(x)$  и  $Q(x)$  са полиноми. Функцията  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  се нарича рационална функция на променливата  $x$ . Казваме, че рационалната функция  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  е правилна дроб, ако  $\deg P(x) < \deg Q(x)$ . Рационалната функция  $\frac{a}{(x - \alpha)^p}$ ,  $p \in \mathbb{N}$  се нарича елементарна дроб от първи род. Рационалната функция  $\frac{bx + c}{(x^2 + \beta x + \gamma)^q}$ ,  $q \in \mathbb{N}$  се нарича елементарна дроб от втори род. Ако рационалната функция  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  не е правилна дроб, т.е.  $\deg P(x) \geq \deg Q(x)$ , тя винаги може да се представи във вида  $\frac{P(x)}{Q(x)} = W(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ , където  $W(x)$  е полином, а  $\frac{R(x)}{Q(x)}$  е правилна дроб. Всеки полином  $Q(x)$  може да се представи като произведение на взаимно прости, неразложими над полето на реалните числа множители, т.е.

$$(4) \quad Q(x) = C \cdot \left( \prod_{i=1}^s (x - \alpha_i)^{p_i} \right) \cdot \left( \prod_{j=1}^r (x^2 + \beta_j x + \gamma_j)^{q_j} \right),$$

където  $x^2 + \beta_j x + \gamma_j \neq 0$  за всяко  $x \in \mathbb{R}$ ,  $p_i, q_j \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_i, \beta_j, \gamma_j \in \mathbb{R}$ . Всяка правилна дроб  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , където  $Q$  се представя във вида (4), може да се запише като

$$(5) \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^s \left( \sum_{k=1}^{p_i} \frac{a_{ik}}{(x - \alpha_i)^k} \right) + \sum_{j=1}^r \left( \sum_{k=1}^{q_j} \frac{b_{jk}x + c_{jk}}{(x^2 + \beta_j x + \gamma_j)^k} \right).$$

Константите  $a_{ji}$ ,  $b_{ji}$  и  $c_{ji}$  се определят по метода на неопределените коефициенти.

От (5) следва, че интегрирането на произволна рационална функция се свежда до интегриране на елементарни дроби от първи и втори род.

Да пресметнем интеграли, при които подинтегралните функции са елементарни дроби от първи род:

$$\int \frac{adx}{(x-\alpha)} = a \ln |x-\alpha| + C,$$

$$\int \frac{adx}{(x-\alpha)^k} = \frac{a}{(1-k)(x-\alpha)^{k-1}} + C, \quad k \neq 1.$$

Във връзка с пресмятането на интеграли, чиито подинтегрални функции са елементарни дроби от втори род, да разгледаме отделянето на точен квадрат от квадратен тричлен

$$x^2 + \beta x + \gamma = \left(x + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(\gamma - \frac{\beta^2}{4}\right)$$

Полагаме  $x = t - \frac{\beta}{2}$ . От условието, че  $x^2 + \beta x + \gamma \neq 0$ , следва, че  $\gamma - \frac{\beta^2}{4} > 0$ . Да означим  $\delta = \sqrt{\gamma - \frac{\beta^2}{4}}$ . Използваме Пример 1.17 и пресмятаме

$$\begin{aligned} \int \frac{bx+c}{x^2+\beta x+\gamma} dx &= \int \frac{bt + \left(c - \frac{b\beta}{2}\right)}{t^2 + \delta^2} dt = b \int \frac{t}{t^2 + \delta^2} dt + \left(c - \frac{b\beta}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + \delta^2} \\ &= \frac{b}{2} \int \frac{dt^2}{t^2 + \delta^2} + \left(c - \frac{b\beta}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + \delta^2} \\ &= \frac{b}{2} \ln(t^2 + \delta^2) + \frac{1}{\delta} \left(c - \frac{b\beta}{2}\right) \operatorname{arctg} \frac{t}{\delta} + C \\ &= \frac{b}{2} \ln \left( \left(x + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \gamma - \frac{\beta^2}{4} \right) + \frac{1}{\sqrt{\gamma - \frac{\beta^2}{4}}} \left(c - \frac{b\beta}{2}\right) \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{\beta}{2}}{\delta} + C. \end{aligned}$$

Използваме Пример 1.27 за пресмятането на интеграл от елементарна дроб от втори род

$$\int \frac{bx+c}{(x^2+\beta x+\gamma)^q} dx$$

за  $q > 1$ . След преобразования получаваме:

$$\begin{aligned}
\int \frac{bx + c}{(x^2 + \beta x + \gamma)^q} dx &= \int \frac{bt + \left(c - \frac{b\beta}{2}\right)}{(t^2 + \delta^2)^q} dt = b \int \frac{t}{(t^2 + \delta^2)^q} dt + \left(c - \frac{b\beta}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + \delta^2)^q} \\
&= \frac{b}{2} \int \frac{dt^2}{(t^2 + \delta^2)^q} + \left(c - \frac{b\beta}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + \delta^2)^q} \\
&= -\frac{b}{2(1-q)(t^2 + \delta^2)^{q-1}} \\
&\quad + \left(c - \frac{b\beta}{2}\right) \left( \frac{t}{2(q-1)\delta^2(t^2 + \delta^2)} + \frac{2q-3}{(2q-2)\delta^2} \int \frac{dt}{(t^2 + \delta^2)^{q-1}} \right).
\end{aligned}$$

**Пример 1.28** Пресметнете  $\int \frac{x dx}{(x+1)(x-2)^2}$ .

Представяме подинтегралната функция като сума от елементарни дробни.

$$(6) \quad \frac{x}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{(x-2)^2}.$$

Привеждаме (6) под общ знаменател и получаваме тъждеството

$$\frac{x}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{a(x-2)^2 + b(x+1)(x-2) + c(x+1)}{(x+1)(x-2)^2}.$$

Следователно числителите са тъждествено равни

$$x = a(x-2)^2 + b(x+1)(x-2) + c(x+1).$$

Групираме по степените на  $x$

$$x = (a+b)x^2 + (c-b-4a)x + (4a-2b+c),$$

приравняваме коефициентите пред еднаквите степени и получаваме системата

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ c - b - 4a = 1 \\ 4a - 2b + c = 0, \end{cases}$$

от където намираме  $a = -\frac{1}{9}$ ,  $b = \frac{1}{9}$ ,  $c = \frac{2}{3}$ . Пресмятаме интеграла

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{(x+1)(x-2)^2} dx &= -\frac{1}{9} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{9} \int \frac{dx}{x-2} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{(x-2)^2} \\
&= -\frac{1}{9} \ln|x+1| + \frac{1}{9} \ln|x-2| - \frac{2}{3(x-2)} + C.
\end{aligned}$$

С помощта на *Maple* лесно се решава задачата за представяне на правилна дроб във вид на сума от елементарни дроби.

*with(PolynomialTools) :*

$$P := x \rightarrow x; Q := x \rightarrow (x+1)(x-2)^2; S := x \rightarrow \text{factor} \left( \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{(x-2)^2} \right)$$

$$x \rightarrow x$$

$$x \rightarrow (x+1)(x-2)^2$$

$$x \rightarrow \text{factor} \left( \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{(x-2)^2} \right)$$

$$R := x \rightarrow S(x) \cdot Q(x); \text{collect}(R(x), x)$$

$$x \rightarrow S(x)Q(x)$$

$$(a+b)x^2 + (-4a-b+c)x + 4a-2b+c$$

Командата  $\text{collect}(P(x), x)$  групира по степените на указаната променлива  $x$  за полинома  $P$ .

$$w := \text{CoefficientVector}(P(x) - R(x), x); k := \text{numelems}(w)$$

$$\begin{bmatrix} -4a+2b-c \\ b+4a-c+1 \\ -a-b \end{bmatrix} 3$$

Дефинираме уравненията, които приравняват коефициентите

*for i from 1 to k do*

$$eq_i := w[i] = 0$$

*end do;*

$$-c + 2b - 4a = 0$$

$$b + 4a - c + 1 = 0$$

$$-a - b = 0;$$

$$\text{solve}(\{eq_1, eq_2, eq_3\}, \{a, b, c\});$$

$$\left\{ a = -\frac{1}{9}, b = \frac{1}{9}, c = \frac{2}{3} \right\}.$$

**Пример 1.29** Пресметнете  $\int \frac{3x^2 - x - 2}{(x-1)(1+x^2)^2} dx$ .



Разлагаме подинтегралната функция на сума от елементарни дроби.

$$(7) \quad \frac{2x^4 + 3x^2 - x}{(x-1)(1+x^2)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{1+x^2} + \frac{dx+e}{(1+x^2)^2}.$$

Привеждаме (7) под общ знаменател и получаваме тъждеството

$$\frac{2x^4 + 3x^2 - x}{(x-1)(1+x^2)^2} = \frac{a(1+x^2) + (bx+c)(x-1)(1+x^2) + (dx+e)(x-1)}{(x-1)(1+x^2)^2}.$$

Следователно числителите са тъждествено равни

$$2x^4 + 3x^2 - x = a(1+x^2) + (bx+c)(x-1)(1+x^2) + (dx+e)(x-1).$$

Групираме по степените на  $x$ .

$$2x^4 + 3x^2 - x = (a+b)x^4 + (c-b)x^3 + (2a+b-c+d)x^2 + (c-d-b+e)x + a-e-c$$

приравняваме коефициентите пред еднаквите степени и получаваме системата

$$\left| \begin{array}{rcl} a+b & = & 2 \\ -b+c & = & 0 \\ 2a+b-c+d & = & 3 \\ c-b-d+e & = & -1 \\ a-e-c & = & 0 \end{array} \right.$$

и намираме  $a=1, b=1, c=1, d=1, e=0$ . Пресмятаме интеграла

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 - x - 2}{(x-1)(1+x^2)^2} &= \int \frac{1}{x-1} + \int \frac{x+1}{1+x^2} dx + \int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx \\ &= \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + \operatorname{arctg} - \frac{1}{2(1+x^2)} + C. \end{aligned}$$

Решението с помощта на *Maple* ще има вида:

$$P := x \rightarrow 2 \cdot x^4 + 3 \cdot x^2 - x; Q := x \rightarrow (x-1)(1+x^2)^2;$$

$$S := x \rightarrow \operatorname{factor} \left( \frac{a}{x-1} + \frac{b \cdot x + c}{1+x^2} + \frac{d \cdot x + e}{(1+x^2)^2} \right)$$

$$x \rightarrow 2 \cdot x^4 + 3 \cdot x^2 - x$$

$$x \rightarrow (x-1)(1+x^2)^2$$

$$x \rightarrow factor \left( \frac{a}{x-1} + \frac{b \cdot x + c}{1+x^2} + \frac{d \cdot x + e}{(1+x^2)^2} \right)$$

$$R := x \rightarrow S(x) \cdot Q(x); collect(R(x), x)$$

$$x \rightarrow S(x)Q(x)$$

$$(a+b)x^4 + (c-b)x^3 + (2a+b-c+d)x^2 + (c-b-d+e)x + a-c-e$$

$$w := CoefficientVector(P(x) - R(x), x); k := numelems(w)$$

$$\begin{bmatrix} a-c-e \\ c-b-d+e+1 \\ 2a+b-c+d-3 \\ c-b \\ a+b-2 \end{bmatrix} \quad 5$$

Дефинираме уравненията, които приравняват коефициентите

*for i from 1 to k do*

$$eq_i := w[i] = 0$$

*end do;*

$$a-c-e=0$$

$$c-b-d+e+1=0$$

$$2a+b-c+d-3=0$$

$$c-b=0$$

$$a+b-2=0$$

$$solve(\{eq_1, eq_2, eq_3, eq_4, eq_5\}, \{a, b, c, d, e\});$$

$$\{a=1, b=1, c=1, d=1, e=0\}.$$

**Пример 1.30** Пресметнете

$$\int \frac{-3-8x-2x^3-11x^2+18x^4+48x^6+42x^5+18x^8+37x^7+5x^9}{(x-1)(x+1)^3(1+x^2)(x^2+x+1)^2} dx.$$

$$P := x \rightarrow -3-8 \cdot x-2 \cdot x^3-11 \cdot x^2+18 \cdot x^4+48 \cdot x^6+42 \cdot x^5+18 \cdot x^8+37 \cdot x^7+5 \cdot x^9;$$

$$Q := x \rightarrow (x-1)(x+1)^3(1+x^2)(x^2+x+1)^2;$$

$$S := x \rightarrow \text{factor} \left( \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x+1} + \frac{a_3}{(x+1)^2} + \frac{a_4}{(x+1)^3} \right. \\ \left. + \frac{a_5 \cdot x + a_6}{1+x^2} + \frac{a_7 \cdot x + a_8}{x^2+x+1} + \frac{a_9 \cdot x + a_{10}}{(x^2+x+1)^2} \right)$$

$$x \rightarrow -3 - 8 \cdot x - 2 \cdot x^3 - 11 \cdot x^2 + 18 \cdot x^4 + 48 \cdot x^6 + 42 \cdot x^5 + 18 \cdot x^8 + 37 \cdot x^7 + 5 \cdot x^9;$$

$$x \rightarrow (x-1)(x+1)^3(1+x^2)(x^2+x+1)^2;$$

$$x \rightarrow \text{factor} \left( \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x+1} + \frac{a_3}{(x+1)^2} + \frac{a_4}{(x+1)^3} \right. \\ \left. + \frac{a_5 \cdot x + a_6}{1+x^2} + \frac{a_7 \cdot x + a_8}{x^2+x+1} + \frac{a_9 \cdot x + a_{10}}{(x^2+x+1)^2} \right)$$

$$R := x \rightarrow S(x) \cdot Q(x); \text{collect}(R(x), x)$$

$$x \rightarrow S(x)Q(x)$$

$$(a_7 + a_2 + a_5 + a_1)x^9 + (3a_2 + 4a_5 + 3a_7 + a_8 + a_6 + a_3 + 5a_1)x^8 \\ + (5a_2 + 4a_7 + 7a_5 + a_4 + 4a_6 + 2a_3 + 3a_8 + a_9 + 13a_1)x^7 \\ + (3a_7 + 7a_6 + 6a_5 + 5a_2 + 23a_1 + 4a_8 + a_4 + a_{10} + 3a_3 + 2a_9)x^6 \\ + (2a_{10} + 6a_6 + 2a_2 + a_9 + 3a_8 + 30a_1 + 2a_4 + 2a_3)x^5 \\ + (-2a_2 - 6a_5 - 3a_7 + a_{10} + 30a_1)x^4 \\ + (23a_1 - a_9 - 3a_8 - 2a_3 - 5a_2 - 7a_5 - 4a_7 - 6a_6)x^3 \\ + (-2a_4 - 4a_8 - 3a_7 - 3a_3 + 13a_1 - 5a_2 - 2a_9 - a_{10} - 7a_6 - 4a_5)x^2 \\ + (-a_5 - 3a_2 - a_7 - a_9 + 5a_1 - 3a_8 - 2a_3 - a_4 - 2a_{10} - 4a_6)x \\ - a_2 + a_1 - a_3 - a_4 - a_6 - a_8 - a_{10}$$

$$w := \text{CoefficientVector}(P(x) - R(x), x); k := \text{numelems}(w)$$

$$\left[ \begin{array}{c} 3 - a_2 + a_1 - a_3 - a_4 - a_6 - a_8 - a_{10} \\ 8 - a_5 - 3a_2 - a_7 - a_9 + 5a_1 - 3a_8 - 2a_3 - a_4 - 2a_{10} - 4a_6 \\ 11 - 2a_4 - 4a_8 - 3a_7 - 3a_3 + 13a_1 - 5a_2 - 2a_9 - a_{10} - 7a_6 - 4a_5 \\ 2 + 23a_1 - a_9 - 3a_8 - 2a_3 - 5a_2 - 7a_5 - 4a_7 - 6a_6 \\ -18 - 2a_2 - 6a_5 - 3a_7 + a_{10} + 30a_1 \\ -42 + 2a_{10} + 6a_6 + 2a_2 + a_9 + 3a_8 + 30a_1 + 2a_4 + 2a_3 \\ -48 + 3a_7 + 7a_6 + 6a_5 + 5a_2 + 23a_1 + 4a_8 + a_4 + a_{10} + 3a_3 + 2a_9 \\ -37 + 5a_2 + 4a_7 + 7a_5 + a_4 + 4a_6 + 2a_3 + 3a_8 + a_9 + 13a_1 \\ -18 + 3a_2 + 4a_5 + 3a_7 + a_8 + a_6 + a_3 + 5a_1 \\ -5 + a_7 + a_2 + a_5 + a_1 \end{array} \right]$$

Дефинираме уравненията, които приравняват коефициентите

*for i from 1 to k do*

*eq<sub>i</sub> := w[i] = 0*

*end do;*

$$3 - a_2 + a_1 - a_3 - a_4 - a_6 - a_8 - a_{10} = 0$$

$$8 - a_5 - 3a_2 - a_7 - a_9 + 5a_1 - 3a_8 - 2a_3 - a_4 - 2a_{10} - 4a_6 = 0$$

$$11 - 2a_4 - 4a_8 - 3a_7 - 3a_3 + 13a_1 - 5a_2 - 2a_9 - a_{10} - 7a_6 - 4a_5 = 0$$

$$2 + 23a_1 - a_9 - 3a_8 - 2a_3 - 5a_2 - 7a_5 - 4a_7 - 6a_6 = 0$$

$$-18 - 2a_2 - 6a_5 - 3a_7 + a_{10} + 30a_1 = 0$$

$$-42 + 2a_{10} + 6a_6 + 2a_2 + a_9 + 3a_8 + 30a_1 + 2a_4 + 2a_3 = 0$$

$$-48 + 3a_7 + 7a_6 + 6a_5 + 5a_2 + 23a_1 + 4a_8 + a_4 + a_{10} + 3a_3 + 2a_9 = 0$$

$$-37 + 5a_2 + 4a_7 + 7a_5 + a_4 + 4a_6 + 2a_3 + 3a_8 + a_9 + 13a_1 = 0$$

$$-18 + 3a_2 + 4a_5 + 3a_7 + a_8 + a_6 + a_3 + 5a_1 = 0$$

$$-5 + a_7 + a_2 + a_5 + a_1$$

$\text{solve}(\{eq_1, eq_2, eq_3, eq_4, eq_5, eq_6, eq_7, eq_8, eq_9, eq_{10}\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}\});$   
 $\{a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = -1, a_4 = 1, a_5 = 1, a_6 = 1, a_7 = 1, a_8 = 0, a_9 = 0, a_{10} = 1\}.$

Пресмятаме интегралите:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1|; & I_2 &= \int \frac{2}{x+1} dx = 2 \ln|x+1|; \\ I_3 &= \int \frac{-1}{(x+1)^2} dx = \frac{1}{x+1}; & I_4 &= \int \frac{1}{(x+1)^3} dx = \frac{-1}{2(x+1)^2}; \\ I_5 &= \int \frac{x+1}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \operatorname{arctg} x; \\ I_6 &= \int \frac{x}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left( \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right); \\ I_7 &= \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx = \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left( \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

(ще припомним, че когато *Maple* пресмята неопределени интеграли не добавя константата  $C$ ) и получаваме

$$\int \frac{-3-8x-2x^3-11x^2+18x^4+48x^6+42x^5+18x^8+37x^7+5x^9}{(x-1)(x+1)^3(1+x^2)(x^2+x+1)^2} = \sum_{i=1}^7 I_i + C.$$

Разбира се с *Maple* можем да пресметнем и последния интеграл и да получим директно отговора:

$$\int \frac{-3-8x-2x^3-11x^2+18x^4+48x^6+42x^5+18x^8+37x^7+5x^9}{(x-1)(x+1)^3(1+x^2)(x^2+x+1)^2};$$

$$\begin{aligned} &\ln|x-1| + 2 \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \operatorname{arctg} x \\ &+ \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left( \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left( \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ:

1) Пресметнете интегралите:

$$\text{а) } \int \frac{x dx}{(x+1)(x-1)}; \quad \text{б) } \int \frac{(1+2x) dx}{(x+1)(x-2)}; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{(x+1)^2(x+2)}; \quad \text{г) } \int \frac{(x^2+x) dx}{(x+1)^2(x+2)^3}.$$

2) Пресметнете интегралите:

$$\text{a) } \int \frac{dx}{(1+x^2)(2+x^2)}; \quad \text{б) } \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2(2+x^2)}; \quad \text{в) } \int \frac{(1+x-x^2)dx}{(1+x^2)^2(2+x^2)^3}.$$

3) Пресметнете интегралите:

$$\text{a) } \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)(2+x)}; \quad \text{б) } \int \frac{x dx}{(1+x^2)(x-1)^2}; \quad \text{в) } \int \frac{(1+x)dx}{(1+x^2)^2(x+1)^3}.$$

## 1.5 Интегриране на ирационални функции

Нека  $R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$  е рационална функция на две променливи. Пресмятането на интеграла

$$(8) \quad \int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right) dx$$

се свежда до пресмятане на интеграл от рационална функция, ако положим  $t = \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}$ .

Наистина, нека  $t = \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}$ . Получаваме  $x = \varphi(t) = \frac{\delta t^m - \beta}{\alpha - \gamma t^m}$  и  $dx = \varphi'(t)dt = \frac{m\delta t^{m-1}(\alpha - \gamma t^m) + m\gamma t^{m-1}(\delta t^m - \beta)}{(\alpha - \gamma t^m)^2} dt = \frac{mt^{m-1}(\delta\alpha - \gamma\beta)}{(\alpha - \gamma t^m)^2} dt$ . Заместваме в (8) и получаваме

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right) dx = \int R\left(\frac{\delta t^m - \beta}{\alpha - \gamma t^m}, t\right) \varphi'(t) dt = \int R\left(\frac{\delta t^m - \beta}{\alpha - \gamma t^m}, t\right) \frac{mt^{m-1}(\delta\alpha - \gamma\beta)}{(\alpha - \gamma t^m)^2} dt,$$

където последният интеграл е интеграл от рационална функция и следователно може да бъде пресметнат чрез метода от предходния параграф.

**Пример 1.31** Пресметнете  $\int \frac{1}{(x+2)^2} \sqrt[4]{\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^3} dx$ .

Полагаме  $t = \sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}$ . Намираме  $x = \frac{2+t^4}{t^4-1}$ ,  $x+2 = \frac{3t^4}{t^4-1}$ ,  $dx = \left(\frac{2+t^4}{t^4-1}\right)' dt = \frac{-12t^3}{(t^4-1)^2} dt$ . Заместваме и получаваме

$$\int \frac{1}{(x+2)^2} \sqrt[4]{\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^3} dx = \int \left(\frac{t^4-1}{3t^4}\right)^2 t^3 \frac{-12t^3}{(t^4-1)^2} dt = -\frac{4}{3} \int \frac{dt}{t^2} = \frac{4}{3t} + C = \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}} + C$$

Ще отбележим, че в този пример рационалната функция на две променливи  $R(x, y)$  има вида  $R(x, y) = \frac{y}{(x+2)^2}$ .

С помощта на *Maple* можем да извършваме всичките пресмятания, свързани с използването на субституции.

$$R := (x, y) \rightarrow \frac{y^3}{(x+2)^2};$$

$$(x, y) \rightarrow \frac{y}{(x+2)^2}$$

Решаваме уравнението  $t = \sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}$  и намираме  $x = \varphi(t)$

$$\varphi := t \rightarrow \text{solve} \left( t = \sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}, x \right); \varphi(t)$$

$$t \rightarrow \text{solve} \left( t = \sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}, x \right), \frac{2+t^4}{t^4-1}$$

Пресмятаме производната на  $\varphi$

$$\varphi1 := t \rightarrow \text{simplify}(\text{diff}(\varphi(t), t)); \varphi1(t);$$

$$t \rightarrow \text{simplify}(\text{diff}(\varphi(t), t)), -\frac{12t^3}{(t^4-1)^2}.$$

Извършваме заместването

$$\text{simplify}(R(\varphi(t), t) \cdot \varphi1(t));$$

$$-\frac{4}{3t^2}.$$

Можем също така и да пресметнем директно интеграла, който се получава след заместването

$$\text{int}(R(\varphi(t), t) \cdot \varphi1(t), t);$$

$$\frac{4}{3t}.$$

**Пример 1.32** Пресметнете  $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} dx$ .

Да отбележим, че в този пример рационалната функция на две променливи  $R(x, y)$  има вида  $R(x, y) = \frac{y+2}{(x+1)^2 - y}$ . Полагаме  $t = \sqrt{x+1}$ . Намираме  $x = t^2 - 1$ ,  $x+1 = t^2$ ,  $dx = 2tdt$ . Заместваме и получаваме

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}} dx &= \int \frac{2(t+2)tdt}{t^4-t} = 2 \int \frac{t+2}{t^3-1} dt = 2 \int \frac{t+2}{(t-1)(t^2+t+1)} dt \\
&= 2 \int \left( \frac{1}{t-1} - \frac{t+1}{t^2+t+1} \right) dt \\
&= 2 \left( \ln|t-1| - \frac{\ln(t^2+t+1)}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left( \frac{2t+1}{\sqrt{3}} \right) \right) + C \\
&= \ln \frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left( \frac{2t+1}{\sqrt{3}} \right) + C \\
&= \ln \frac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{x+\sqrt{x+1}+2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left( \frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}} \right) + C
\end{aligned}$$

Нека  $R(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{P(x_1, x_2, \dots, x_n)}{Q(x_1, x_2, \dots, x_n)}$  е рационална функция на  $n$  променливи.

Пресмятането на интеграла

$$(9) \quad \int R \left( x, \sqrt[s_1]{\left( \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \right)^{p_1}}, \sqrt[s_2]{\left( \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \right)^{p_2}}, \dots, \sqrt[s_{n-1}]{\left( \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \right)^{p_{n-1}}} \right) dx$$

се свежда до пресмятане на интеграл от рационална функция, ако положим  $t = \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}$ , където  $m$  е най-малкото общо кратно на  $s_i, i = 1, 2, \dots, n-1$ .

Наистина, да положим  $t = \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}$ . Получаваме  $x = \varphi(t) = \frac{\delta t^m - \beta}{\alpha - \gamma t^m}$  и  $dx = \frac{mt^{m-1}(\delta\alpha - \gamma\beta)}{(\alpha - \gamma t^m)^2} dt$ . Заместваме в (9) и получаваме

$$\int R \left( \frac{\delta t^m - \beta}{\alpha - \gamma t^m}, t^{\frac{mp_1}{s_1}}, \dots, t^{\frac{mp_{n-1}}{s_{n-1}}} \right) \varphi'(t) dt = \int R_1(t) \frac{mt^{m-1}(\delta\alpha - \gamma\beta)}{(\alpha - \gamma t^m)^2} dt,$$

където  $R_1(t) = R \left( \frac{\delta t^m - \beta}{\alpha - \gamma t^m}, t^{\frac{mp_1}{s_1}}, \dots, t^{\frac{mp_{n-1}}{s_{n-1}}} \right)$  е рационална функция на  $t$ .

**Пример 1.33** Пресметнете  $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}}$ .

Полагаме  $t = \sqrt[4]{2x-1}$ . Намираме  $x = t^4 - 1$ ,  $dx = 4t^3 dt$ . Заместваме и получаваме

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}} &= \int \frac{2t^3 dt}{t^2 - t} = 2 \int \frac{t^2 dt}{t-1} = 2 \int \frac{t^2 - 1 + 1}{t-1} dt \\
&= 2 \left( \int (t+1) dt + \int \frac{1}{t-1} \right) = 2 \left( \frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1| \right) + C \\
&= \sqrt[4]{2x+1} + 2\sqrt[4]{2x+1} + \ln(\sqrt[4]{2x+1} + 1) + C.
\end{aligned}$$



Ще отбележим, че в този пример рационалната функция на три променливи  $R(x, y, z)$  има вида  $R(x, y, z) = \frac{1}{y - z}$ .

**Пример 1.34** Пресметнете  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$ .

Ако се опитае да пресметнем с *Maple* интеграла

$$\text{int} \left( \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}, x \right);$$

получаваме отговор

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} dx,$$

което означава, че *Maple* не успява да се справи с пресмятането на интеграла. Ето защо ще извършим последователно всички полагания и преобразувания с помощта на *Maple*

С помощта на *Maple* можем да извършваме всичките пресмятания, свързани с използването на субституции.

$$R := (x, y) \rightarrow \frac{1}{y + z};$$

$$(x, y) \rightarrow \frac{1}{y + z}$$

Решаваме уравнението  $t = \sqrt[6]{\frac{x+1}{x-1}}$  и намираме  $x = \varphi(t)$

$$\varphi := t \rightarrow \text{solve} \left( t = \sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}, x \right); \varphi(t)$$

$$t \rightarrow \text{solve} \left( t = \sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}, x \right), \frac{1+t^6}{t^6-1}$$

Пресмятаме производната на  $\varphi$

$$\varphi_1 := t \rightarrow \text{simplify}(\text{diff}(\varphi(t), t)); \varphi_1(t);$$

$$t \rightarrow \text{simplify}(\text{diff}(\varphi(t), t)), -\frac{12t^5}{(t^6-1)^2}.$$

Извършваме заместването

$$\text{simplify}(R(\varphi(t), t^2, t^3) \cdot \varphi_1(t));$$

$$-\frac{12t^3}{(1+t)(t^6-1)^2}.$$

Можем също така и да пресметнем директно интеграла, който се получава след заместването

$f := t \rightarrow \int (R(\varphi(t), t^2, t^3) \cdot \varphi 1(t), t); f(t);$   
и получаваме

$$t \rightarrow \int (R(\varphi(t), t^2, t^3) \cdot \varphi 1(t), t) \\ - \frac{2t+1}{3(t^2+t+1)} - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \left( \frac{2t+1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{\ln(t^2+t+1)}{6} - \frac{2}{3(t+1)} \\ + \frac{1}{3(t^2-t+1)} + \frac{\ln(1+t)}{36} - \frac{1}{6(1+t)^2} + \frac{1}{t-1} \\ + \frac{5 \ln(t-1)}{12} - \frac{7 \ln(t^2-t+1)}{18} + \frac{\operatorname{arctg} \left( \frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right)}{\sqrt{3}}.$$

Остава само да върнем полагането и да заместим  $t$  с  $\sqrt[6]{\frac{x+1}{x-1}}$ .

С пакета *IntegrationTools Maple* извършва необходимите преобразувания при използване на субституция. Командата е  $Change(I, x = f(t))$  с променливи  $I$  – неопределеният интеграл, който искаме да пресметнем, а  $f(t)$  – субституцията, която използваме.

*with(IntegrationTools) :*

$$Change \left( \int \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} dx, x = \frac{t^6+1}{t^6-1} \right) \\ - \int \frac{12t^5}{(\sqrt[3]{t^6} + \sqrt{t^6})(t^6-1)^2} dt$$

Тъй като се получава четен корен от  $t$ , *Maple* не може да съобрази на колко е равен и затова не извършва преобразованията.

Нека с пакета *IntegrationTools* да пресметнем интеграла  $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$ .

$$Change \left( \operatorname{int} \left( \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}, x \right), x = (t^3-1)^4 \right) \\ \frac{12}{7}(1+\sqrt[4]{x})^{7/3} - 3(1+\sqrt[4]{x})^{4/3}.$$

ЗАДАЧИ:

1) Пресметнете интегралите

$$\text{a)} \int \frac{\sqrt{x} + 1}{x^2 - \sqrt{x}} dx; \quad \text{б)} \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}; \quad \text{в)} \int \frac{1 + \sqrt[6]{x}}{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}) \sqrt[4]{x}} dx;$$

$$\text{г)} \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}; \quad \text{д)} \int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx.$$

2) Пресметнете интегралите

$$\text{a)} \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}}; \quad \text{б)} \int \frac{dx}{(3-x)\sqrt{1-x}}; \quad \text{в)} \int x \sqrt{\frac{x+2}{x-3}} dx; \quad \text{г)} \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx.$$

3) Пресметнете интегралите

$$\text{a)} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x(1+x)^2}}; \quad \text{б)} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)}}; \quad \text{в)} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^7}}; \quad \text{г)} \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}.$$

3) Пресметнете интегралите

$$\text{a)} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x(1+x)^2}} dx; \quad \text{б)} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)}}; \quad \text{в)} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^7}}; \quad \text{г)} \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}.$$

## 1.6 Интегриране на диференциален бином

Диференциален бином се нарича израз от вида

$$x^m (a + bx^n)^p dx,$$

където  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $m, n, p \in \mathbb{Q}$ .

**Теорема 1.3** Нека  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $m, n, p \in \mathbb{Q}$ . Интегралът

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx$$

се свежда до интеграл от рационална функция, ако

1)  $p \in \mathbb{Z}$  полагаме  $t = \sqrt[s]{x}$ , където  $s$  е най-малкото общо кратно на знаменателите на  $m$  и  $n$ ;

2)  $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$  полагаме  $t = \sqrt[s]{a + bx^n}$ , където  $s$  е знаменателят на  $p$ ;

3)  $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$  полагаме  $t = \sqrt[s]{\frac{a}{x^n}} + b$ , където  $s$  е знаменателят на  $p$ .

**Доказателство:** 1) Ако  $p \in \mathbb{Z}$ , то  $\int x^m (a + bx^n)^p dx$  е интеграл от вида, разгледан в предходния параграф. Наистина, ако  $s$  е най-малкото общо кратно на знаменателите на  $m$  и  $n$ , то  $x^m (a + bx^n)^p = R(\sqrt[s]{x})$  за някоя рационална функция  $R$ . В този случай интегралът се решава с полагането  $t = \sqrt[s]{x}$ .

2) Ако  $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ , да положим  $z = x^n$  и  $q = \frac{m+1}{n} - 1$ . Тогава от  $x^m = z^{m/n}$  и  $dx = d(z^{1/n}) = \frac{1}{n} z^{1/n-1} dz$  получаваме

$$(10) \quad x^m (a + bx^n)^p dx = \frac{(a + bz)^p z^{\frac{m+1}{n}-1}}{n} dz = \frac{(a + bz)^p z^q}{n} dz.$$

Ако  $q \in \mathbb{Z}$ , то отново интегралът е от изучените в предходния параграф. Наистина, ако положим  $s$  да е знаменателя на  $p$ , то получаваме представянето  $\frac{(a + bz)^p z^q}{n} = R(z, \sqrt[s]{a + bz})$ . Полагаме  $v = \sqrt[s]{a + bz} = \sqrt[s]{a + bx^n}$ .

3) Ако  $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$ , то ще преобразуваме диференциалния бином (10) по следния начин

$$x^m (a + bx^n)^p dx = \frac{(a + bz)^p z^q}{n} dz = \frac{1}{n} \left( \frac{a + bz}{z} \right)^p z^{p+q} dz.$$

Веднага виждаме, че ако  $p + q \in \mathbb{Z}$ , то  $\left( \frac{a+bz}{z} \right)^p z^{p+q} = R \left( z, \sqrt[s]{\frac{a + bz}{z}} \right)$ , където  $s$  е знаменателят на  $p$ . Полагаме

$$u = \sqrt[s]{\frac{a + bz}{z}} = \sqrt[s]{\frac{a + bx^n}{x^n}} = \sqrt[s]{\frac{a}{x^n} + b}.$$

□

Трите случая за интегрируемост са били известни още на Нютон. В средата на 19 век Чебишов доказва, че други случаи, при които диференциалният бином да може да се интегрира не съществуват.

Пафнютин Чебишов (1821–1894) е руски математик. Той е обучаван в домашни условия от майка си и своята братовчедка. В ранна възраст научава френски език, което му помага в последствие при контактите с европейските математици. Вроден недъг в крака му, не му позволява да си играе с другите деца, поради което от ранна възраст му позволява да се концентрира върху учението. Завършва Московския университет през 1841. Работи като професор в Московския университет. Неговите най-известни ученици са Андрей Марков и Александър Ляпунов. Научните му приноси са в областта на вероятностите и статистиката, теория на числата, числените методи.



Фигура 2: Пафнютин Чебышёв

**Пример 1.35** Пресметнете  $\int \frac{\sqrt{x}}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} dx$ .

От равенството

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} dx = \int x^{\frac{1}{2}} (1 + x^{\frac{1}{3}})^{-2} dx$$

получаваме, че подинтегралната функция е диференциален бином с  $m = \frac{1}{2}$ ,  $n = \frac{1}{3}$  и  $p = -2$ . От  $p = -2 \in \mathbb{Z}$  следва, че интегралът може да се реши с полагането  $t = \sqrt[6]{x}$ . След преобразуване установяваме  $x = t^6$  и  $dx = 6t^5 dt$ . Заместваме и получаваме

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} dx &= 6 \int \frac{t^8}{(1 + t^2)^2} dt = 6 \int (t^4 - 2t^2 + 3) dt - 6 \int \frac{4t^2 + 3}{(1 + t^2)^2} dt \\ &= 6 \left( \frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + 3t \right) - 18 \int \frac{t^2 + 1}{(1 + t^2)^2} dt - 6 \int \frac{t^2}{(1 + t^2)^2} dt \\ &= 6 \left( \frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + 3t \right) - 18 \operatorname{arctg} t - 3 \int \frac{t}{(1 + t^2)^2} d(t^2 + 1) \\ &= 6 \left( \frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + 3t \right) - 18 \operatorname{arctg} t + 3 \int t d \left( \frac{1}{1 + t^2} \right) \\ &= 6 \left( \frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + 3t \right) - 18 \operatorname{arctg} t + 3 \left( \frac{t}{1 + t^2} - \int \frac{dt}{1 + t^2} \right) \\ &= 6 \left( \frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + 3t \right) - 18 \operatorname{arctg} t + \frac{3t}{1 + t^2} - 3 \operatorname{arctg} t + C \\ &= 6 \left( \frac{(\sqrt[6]{x})^5}{5} - \frac{2(\sqrt[6]{x})^3}{3} + 3\sqrt[6]{x} \right) - 21 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + \frac{3\sqrt[6]{x}}{1 + (\sqrt[6]{x})^2} + C. \end{aligned}$$

**Пример 1.36** Пресметнете  $\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$ .

От равенството

$$\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} (1 + x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} dx$$

установяваме, че подинтегралната функция е диференциален бином с  $m = -\frac{1}{2}$ ,  $n = \frac{1}{4}$  и

$p = \frac{1}{3}$ . Тъй като  $\frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = 2 \in \mathbb{Z}$  следва, че интегралът може да се реши с полагането  $t = \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}$ . След преобразуване получаваме  $x = (t^3 - 1)^4$  и  $dx = 12t^2 (t^3 - 1)^3 dt$ .

Заместваме и намираме

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx &= \int \frac{12t^3}{(t^3-1)^2} (t^3-1)^3 dt = 12 \int (t^6 - t^3) dt = \frac{12}{7} t^7 - \frac{12}{4} t^4 + C \\ &= \frac{12}{7} \left( \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} \right)^7 - 3 \left( \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} \right)^4 + C.\end{aligned}$$

**Пример 1.37** Пресметнете  $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$ .

От равенството

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int x^0 (1+x^4)^{\frac{1}{4}} dx$$

получаваме, че подинтегралната функция е диференциален бином с  $m = 0$ ,  $n = 4$  и  $p = -\frac{1}{4}$ . От равенството  $\frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \in \mathbb{Z}$  следва, че интегралът може да

се реши с полагането  $t = \sqrt[4]{x^{-4}+1}$ . След преобразуване установяваме  $x = (t^4 - 1)^{-\frac{1}{4}}$  и  $dx = -t^3 (t^4 - 1)^{-\frac{5}{4}} dt$ . Заместваме и получаваме

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} &= \int \frac{-t^3 (t^4 - 1)^{-\frac{5}{4}}}{t (t^4 - 1)^{-\frac{1}{4}}} dt = - \int \frac{t^2}{t^4 - 1} dt = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t+1} - \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+1} \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt[4]{x^{-4}+1}+1}{\sqrt[4]{x^{-4}+1}-1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \sqrt[4]{x^{-4}+1} + C.\end{aligned}$$

ЗАДАЧИ:

1) Пресметнете интегралите:

а)  $\int \frac{x^3}{\sqrt{(1+2x^2)^3}} dx$ ; б)  $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$ ; в)  $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}}$ ; г)  $\int \frac{dx}{x \sqrt[3]{1+x^5}}$ ;

д)  $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt[3]{(2+x^3)^5}}$ ; е)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3} \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}$ ; ж)  $\int \sqrt{x^3+x^4} dx$ ; з)  $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2} dx$ ;

и)  $\int \frac{x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}} dx$ ; й)  $\int \frac{dx}{x \sqrt[4]{1+x^4}}$ ; к)  $\int \frac{dx}{x \sqrt[6]{1+x^4}}$ ; л)  $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}$ .

## 1.7 Субституции на Ойлер

Интеграли от вида  $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ , където квадратният тричлен  $ax^2 + bx + c$  не е точен квадрат, т.е. няма двоен корен, се решават със субституцията на Ойлер. Има три случая, при които се използват различни субституции.

1) Ако  $a > 0$ , то полагаме  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{ax}$ . След преобразувания, намираме  $x = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{at} + b}$ ,  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{at^2 + bt + c\sqrt{a}}}{2\sqrt{at} + b}$  и  $dx = 2\sqrt{\sqrt{at^2 + bt + c\sqrt{a}}}(2\sqrt{at} + b)dt$ .

След заместване получаваме, че  $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$  се преобразува в рационална функция на  $t$ . След пресмятане на интеграла заместваме с  $t = \sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{ax}$ .

Остроумието в субституцията на Ойлер е в това, че уравнението спрямо  $x$  е линейно уравнение и се получава, че едновременно  $x$  и радикалът  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$  се изразяват с рационални функции на  $t$ .

2) Ако  $c > 0$ , то полагаме  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{cx}$ . След преобразования, намираме  $x = \frac{2\sqrt{ct} - b}{a - t^2}$ ,  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{ct^2 - bt + a\sqrt{c}}}{a - t^2}$  и  $dx = 2\frac{\sqrt{ct^2 - bt + a\sqrt{c}}}{(a - t^2)^2}dt$ .

След заместване получаваме, че  $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$  се преобразува в рационална функция на  $t$ .

След пресмятане на интеграла заместваме  $t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{c}}{x}$ .

3) Ако квадратният тричлен има два различни реални корена  $\lambda$  и  $\mu$ , то полагаме  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \lambda)$ . След преобразования, като използваме тъждеството  $ax^2 + bx + c = a(x - \lambda)(x - \mu)$ , намираме  $x = \frac{-a\mu + \lambda t^2}{t^2 - a}$ ,  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{a(\lambda - \mu)t}{t^2 - a}$  и  $dx = \frac{2a(\mu - \lambda)t}{(t^2 - a)^2}dt$ .

След заместване получаваме, че  $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$  се преобразува в рационална функция на  $t$ . След пресмятане на интеграла заместваме  $t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{c}}{x}$ .

**Забележка** Ще отбележим, че в случай 3) можем да направим преобразованието  $\sqrt{a(x - \lambda)(x - \mu)} = (x - \lambda)\sqrt{a\frac{x - \mu}{x - \lambda}}$  и получаваме

$$R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) = R_1\left(x, \sqrt{a\frac{x - \mu}{x - \lambda}}\right).$$

Интеграли с тези подинтегрални функции вече бяха разгледани.

*Леонард Ойлер (1707-1783) е швейцарски математик, физик и астроном, работил през голяма част от живота си в Русия и Прусия. Смятан е за един от най-великите математици на 18 век, както и за един от най-значимите математици на всички времена. Освен това той е и сред най-плодовитите математици в историята – събраните му съчинения обхващат между 60 и 80 тома.*

*Ойлер е автор на важни открития в различни области на математиката, от математическия анализ до теория на графите. Той пръв използва голяма част от съвременните*

обозначения, най-вече в областта на анализа. Известен е и с работата си в областта на механиката, динамиката на флуидите, оптиката и астрономията.

Докаато Ойлер неуспешно си търси постоянна работа в Базел, двамата синове на Йохан Бернули, Даниел и Николас, вече работят за новосъздадената Императорска академия на науките в Санкт Петербург, новата столица на Русия. На 10 юли 1726 година Николас умира от апендицит и Даниел, който заема мястото му в отдела по математика и физика, препоръчва за дотогавашния си пост в отдела по физика своя приятел Леонард Ойлер. През ноември Ойлер с готовност приема предложението, но забавя заминаването си заради поредното неуспешно кандидатстване за преподавател по физика в Базел.

Леонард Ойлер пристига в Санкт Петербург на 17 май 1727 година и не след дълго е преместен в отдела по математика на академията.

Петербургската академия, основана през 1724 година от император Петър I, си поставя за цел да подобри образованието в Русия и да преодолее изоставането на страната от Западна Европа в областта на науката. По тази причина властите полагат значителни усилия да я направят привлекателна за обещаващи чуждестранни учени като Ойлер. Академията разполага със значителни финансови ресурси и голяма библиотека, формирана с книги на самия император и други представители на аристокрацията. За да се ограничи натоварването на преподавателите, броят на студентите е ограничен. Дейността на академията се фокусира върху изследванията, а преподавателите разполагат с достатъчно време и свобода да се занимават с научни въпроси.



Фигура 3: Leonhard Euler

През цялата кариера на Ойлер неговото зрение постепенно се влошава. Три години след като едва не умира от треска, през 1735 година той почти ослепява с дясното си око. Самият той обяснява това с изтощителната картографска работа, която извършва за Санктпетербургската академия.

Трудовете на Ойлер от първия му петербургски период са главно в областта на механиката, но скоро той започва успешно да разработва корабостроене, картография, астрономия, теория на редовете и теория на числата. Ойлер е първият, публикувал систематизиран елементарен наръчник по механика през 1736 година.

Притеснен от продължаващата политическа нестабилност в Русия, Ойлер напуска Санкт Петербург на 19 юни 1741 година и приема предложението му от крал Фридрих Велики пост в Пруската академия на науките. Следващите 25 години той живее в Берлин, където пише над 380 статии, а през 1744 година оглавява отдела по математика на академията. Там той публикува и двата свои най-известни труда „Въведение в анализа на безкрайното“ (*Introductio in analysin infinitorum*, 1748), посветен на математическите функции и „Основи на диференциалното смятане“ (*Institutiones calculi differentialis*, 1755), разглеждащ диференциалното смятане, основен дял на математическия анализ.

През 1755 година Леонард Ойлер е избран за чуждестранен член на Кралската шведска академия на науките.

След идването на власт на Екатерина Велика политическата обстановка в Русия се стабилизира и през 1766 година, неоценен и дълбоко оскърбен от отношението на крал Фридрих,



Ойлер приема поканата да се върне отново в Санктпетербургската академия на науките.

На 18 септември 1783 година, след обяд със семейството си и докато разговаря със своя колега от академията Андерс Юан Лексел за новооткритата планета Уран и нейната орбита, Леонард Ойлер получава мозъчен кръвоизлив и умира няколко часа по-късно.

Забележителна е невероятната продуктивност на Ойлер. В това отношение той превъзхожда всички математици, а количеството на годишно публикуваните от него страници е значително дори и за романист. Продуктивността на Ойлер надминава възможностите за публикуване както на Берлинската, така и на Санктпетербургската академия – той спокойно може да дава работа на няколко математически института. Геният на Ойлер се проявява и в това, че той създава половината от работите си, когато вече е на практика сляп. Опирайки се на добрата си памет и на невероятното си въображение, той продължава да работи, като диктува на един от помощниците си.

Животът на Ойлер всъщност е почти 60 години творческа дейност, главно в областта на математиката. Той написва 40 книги, около 760 статии за списания, 15 труда по повод на обявени награди и изпълва със записки многобройни бележници и разпраща из Европа няколко хиляди писма. Освен това хиляди неговии страници са останали непубликувани. От статистическа гледна точка Ойлер прави по едно откритие всяка седмица. От друга страна, изключителната многостранност на неговите научни постижения подпомага значително развитието на всички дялове на математиката и той се превръща в пример за математиците от следващите поколения.

Най-известните книги сред огромната библиография на Ойлер са:

„Метод за намиране на криви линии, имащи свойството на максимум или минимум, или решаване на изопериметрични задачи в най-широкия приет смисъл“ 1744, „Въведение в анализа на безкрайното“ 1748, „Основи на диференциалното смятане“ 1755, „Пълни инструкции по алгебра“ 1765, „Основи на интегралното смятане“ 1768–70. Най-авторитетното пълно издание на съчиненията на Леонард Ойлер, озаглавено „Пълни съчинения“ („Opera Omnia“), е публикувано през 1911 година от Ойлеровия комитет на Швейцарските академии на науките.

**Пример 1.38** Пресметнете  $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$ .

Квадратният тричлен удовлетворява случай 1). Полагаме  $\sqrt{x^2 - x + 1} = t - x$ . Намираме  $x = \frac{t^2 - 1}{2t - 1}$ ,  $dx = 2 \frac{t^2 - t + 1}{(2t - 1)^2} dt$  и  $t = x + \sqrt{x^2 - x + 1}$ . Заместваме и получаваме

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} &= \int \frac{2t^2 - 2t + 2}{t(2t - 1)^2} dt = \int \left( \frac{2}{t} - \frac{3}{2t - 1} + \frac{3}{(2t - 1)^2} \right) dt \\ &= \frac{3}{2(2t - 1)} + 2 \ln |t| - \frac{3}{2} \ln |2t - 1| + C \\ &= \frac{3}{4 \left( x + \sqrt{x^2 - x + 1} \right) - 2} + 2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 - x + 1} \right| \\ &\quad - \frac{3}{2} \ln \left| 2 \left( x + \sqrt{x^2 - x + 1} \right) - 1 \right| + C. \end{aligned}$$

**Пример 1.39** Пресметнете  $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$ .

Квадратният тричлен удовлетворява случай 2). Полагаме  $\sqrt{1+x-x^2} = tx+1$ . Намираме  $x = \frac{1-2t}{1+t^2}$ ,  $dx = 2\frac{t^2-t-1}{(1+t^2)^2}dt$ ,  $\sqrt{1+x-x^2} = \frac{1+t-t^2}{-1-t^2}$  и  $t = \frac{\sqrt{1+x-x^2}-1}{x}$ . Заместваме и получаваме

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}} &= 2 \int \frac{dt}{(t^2-2t+2)(1+t^2)^2} \\ &= 2 \int \left( \frac{1}{25} \cdot \frac{4t+7}{1+t^2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2t+1}{(1+t^2)^2} + \frac{1}{25} \cdot \frac{1-4t}{t^2-2t+2} \right) dt \\ &= \frac{2}{25} \ln(1+t^2) + \frac{19}{25} \operatorname{arctg}(t) - \frac{1}{10} \frac{t-2}{1+t^2} + C. \end{aligned}$$

**Пример 1.40** Пресметнете  $\int \frac{xdx}{(\sqrt{7x-10-x^2})^3}$ .

Квадратният тричлен има два реални корена. Следователно можем да използваме втората субституция на Ойлер. Корени на квадратния тричлен са  $\lambda = 2$  и  $\mu = 5$ . Нека да положим  $\sqrt{7x-10-x^2} = \sqrt{(x-2)(x-5)} = (x-2)t$ . Намираме  $x = \frac{5-2t^2}{1+t^2}$ ,  $dx = -\frac{6tdt}{(1+t^2)^2}$ ,  $(x-2)t = \frac{3t}{1+t^2}$  и  $t = \frac{\sqrt{7x-10-x^2}}{x-2}$ . Заместваме и получаваме

$$\begin{aligned} \int \frac{xdx}{(\sqrt{7x-10-x^2})^3} &= -\frac{6}{27} \int \frac{5+2t^2}{t^2} dt = -\frac{2}{9} \int \left( \frac{5}{t^2} + 2 \right) dt \\ &= \frac{10}{9t} - \frac{4t}{9} + C \\ &= \frac{10(x-2)}{9\sqrt{7x-10-x^2}} - \frac{4\sqrt{7x-10-x^2}}{9(x-2)} + C. \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ:

1) Пресметнете интегралите:

а)  $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$ ; б)  $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}$ ; в)  $\int x\sqrt{x^2 - 2x + 2} dx$ ;

г)  $\int \frac{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}} dx$ ; д)  $\int \frac{dx}{(1 + \sqrt{x(1+x)})^2}$ .

## 1.8 Интегриране на тригонометрични функции.

Диференциалите от вида  $R(\sin x, \cos x)dx$ , където  $R$  е рационална функция на две променливи винаги могат да се рационализират със субституцията

$$(11) \quad t = \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} \right).$$

$$\text{При това полагане получаваме } \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} \right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \left( \frac{x}{2} \right)} = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \left( \frac{x}{2} \right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \left( \frac{x}{2} \right)} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

$x = 2 \operatorname{arctg} t$  и  $dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$ . Така интегралите от вида

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R \left( \frac{2t}{1 + t^2}, \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \right) \cdot \frac{2dt}{1 + t^2}$$

се свеждат до пресмятане на интеграли от рационална функция.

Полагането със субституцията (11) е универсално и привежда всяка рационална функция от  $\sin$  и  $\cos$  към рационална функция на  $t$ . Има частни случаи, при които могат да бъдат намалени пресмятанията, ако се използват други субституции.

1) Ако рационалната функция  $R$  удовлетворява равенството  $R(-u, v) = -R(u, v)$ , то можем да използваме субституцията  $t = \cos x$ . При това полагане получаваме  $\sin x = \sqrt{1 - t^2}$ ,  $x = \arccos t$  и  $dx = -\frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$ .

2) Ако рационалната функция  $R$  удовлетворява равенството  $R(u, -v) = -R(u, v)$ , то можем да използваме субституцията  $t = \sin x$ . При това полагане получаваме  $\cos x = \sqrt{1 - t^2}$ ,  $x = \arcsin t$  и  $dx = \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$ .

3) Ако рационалната функция  $R$  удовлетворява равенството  $R(-u, -v) = R(u, v)$ , то можем да използваме субституцията  $t = \operatorname{tg} x$ . При това полагане получаваме  $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}$ ,  $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}$ ,  $x = \operatorname{arctg} t$  и  $dx = \frac{dt}{1 + t^2}$ .

Ще обърнем внимание на частен случай 1). Ако  $R(-u, v) = R(u, v)$  следва, че съществува  $R_1(u, v)$ , така че  $R(-u, v) = R_1(u^2, v)$ , т.е. съдържа само четни степени на  $u$ . Ако  $R(-u, v) = -R(u, v)$ , то  $\frac{R(-u, v)}{-u} = \frac{R(u, v)}{u}$ . Следователно съществува  $R_2(u, v)$ , така че  $R(u, v) = R_2(u^2, v)u$ .

Ако положим  $\cos(x) = t$  след заместване получаваме

$$R(\sin x, \cos x)dx = R_2 \left( \left( \sqrt{1 - t^2} \right)^2, t \right) \sqrt{1 - t^2} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = R_2(1 - t^2, t) dt,$$

т.е. получаваме рационална функция на променливата  $t$ .

**Пример 1.41** Пресметнете  $\int \frac{dx}{\sin x(2 + \cos x - 2 \sin x)}$ .

Интегралът не е от нито един от 3-те частни случая и следователно ще използваме субституцията  $t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ . Заместваме и получаваме

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\sin x(2 + \cos x - 2 \sin x)} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} \left(2 + \frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{4t}{1+t^2}\right)} \\ &= \int \frac{(1+t^2)dt}{t(t^2 - 4t + 3)} = \int \frac{(1+t^2)dt}{t(t-3)(t-1)} = \int \left(\frac{1}{3t} + \frac{5}{3} \frac{1}{t-3} - \frac{1}{t-1}\right) dt \\ &= \frac{1}{3} \ln |t| + \frac{5}{3} \ln |t-3| - \ln |t-1| + C \\ &= \frac{1}{3} \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \right| + \frac{5}{3} \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) - 3 \right| - \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \right| + C. \end{aligned}$$

**Пример 1.42** Пресметнете  $\int \frac{dx}{\sin x(2 \cos^2 x - 1)}$ .

Интегралът е от частен случай 1) и следователно ще използваме субституцията  $t = \cos x$ . Заместваме и получаваме

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\sin x(2 \cos^2 x - 1)} = - \int \frac{dt}{(1-t^2)(2t^2 - 1)} = \int \left( \frac{2}{1-2t^2} - \frac{1}{1-t^2} \right) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1+t\sqrt{2}}{1-t\sqrt{2}} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{2} \cos x}{1-\sqrt{2} \cos x} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\cos x}{1-\cos x} \right| + C. \end{aligned}$$

**Пример 1.43** Пресметнете  $\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x} dx$ .

Интегралът е от частен случай 3) и следователно ще използваме субституцията  $t = \operatorname{tg} x$ . Заместваме и получаваме

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{t^2 dt}{(t+1)(t^2+1)^2} = \int \left( \frac{1}{4} \frac{1}{1+t} - \frac{1}{4} \frac{t-1}{t^2+1} + \frac{1}{2} \frac{t-1}{(t^2+1)^2} \right) dt \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}} \right| - \frac{1}{4} \frac{1+t}{1+t^2} + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} \right| - \frac{1}{4} \frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} + C. \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ:

1) Пресметнете интегралите

$$\text{a)} \int \frac{dx}{3+5\cos x}; \quad \text{б)} \int \frac{dx}{\sin x + \cos x}; \quad \text{в)} \int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx; \quad \text{г)} \int \frac{\sin x}{1-\sin x} dx;$$

$$\text{д)} \int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}; \quad \text{е)} \int \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}; \quad \text{ж)} \int \frac{3\sin x+2\cos x}{2\sin x+3\cos x} dx; \quad \text{з)} \int \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} dx;$$

$$\text{и)} \int \frac{dx}{3\sin^2 x+5\cos^2 x}; \quad \text{й)} \int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}; \quad \text{к)} \int \frac{\sin x}{(1-\cos^2 x)^3} dx; \quad \text{л)} \int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} dx.$$

## 2 Определен интеграл

Да разгледаме задачата за намиране на изминатия път от момента  $t_0 = 0$  до  $t_1 = 1$  от обект, който се движи с променлива скорост. Нека скоростта на обекта  $v(t) = t^2$  е функция, зависеща от времето. Да разделим интервала  $[0, 1]$  на  $n$  равни части. Тогава изминатият път за времето от  $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$  удовлетворява неравенствата

$$(12) \quad \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = v\left(\frac{k-1}{n}\right) \frac{1}{n} \leq S\left(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]\right) \leq v\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} = \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{1}{n}$$

за  $k = 1, 2, \dots, n$ . След сумиране по  $k$  намираме, че общият изминат път удовлетворява неравенствата

$$(13) \quad \sum_{k=1}^n \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} \leq S([0, 1]) \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{1}{n}.$$

Да разгледаме Таблица 1, в която сме попълнили стойностите от (13) за  $n = 5, 10, 20, 100, 1000, 10000$ .

$n$	Лява сума	Дясна сума	Разлика на двете суми	Средна стойност на двете суми
5	0, 24	0, 44	0, 2	0, 34
10	0, 285	0, 385	0, 1	0, 335
20	0, 30875	0, 35875	0, 05	0, 33375
100	0, 33283	0, 33835	0, 001	0, 33335
1000	0, 33283	0, 33383	0, 001	0, 33333
10000	0, 33328	0, 33338	0, 0001	0, 33333

От горната таблица забелязваме, че при увеличаване броя на деленията изминатият път се ограничава от числа, които стават все по близки едно до друго. Също така виждаме, че левите суми нарастват с увеличение на  $n$ , докато десните суми намаляват.

Попълването на таблицата се извършва бързо и лесно с *Maple*

$f := t \rightarrow t^2;$

$t \rightarrow t^2$

$A := [5, 10, 20, 100, 1000, 100000]; m := \text{numelems}(A);$

С цикъла отпечатваме горната таблица:

*for*  $i$  *to*  $m$  *do*

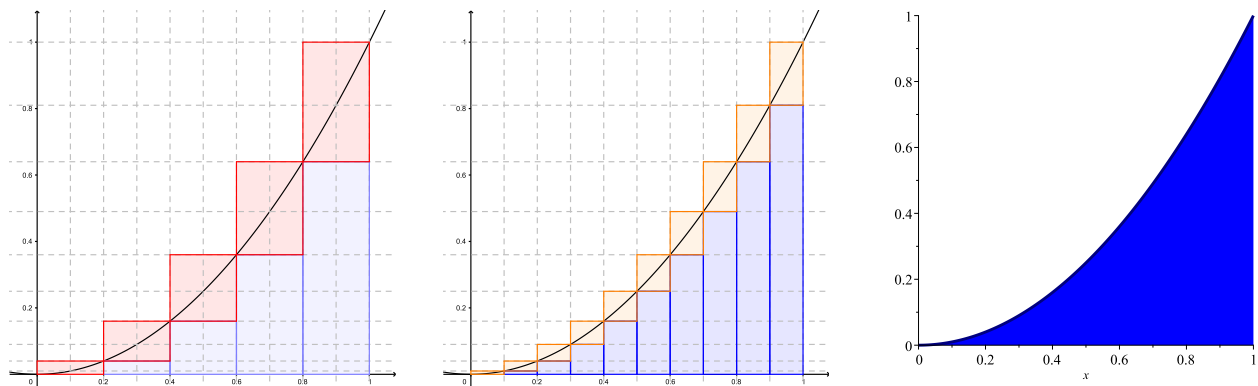
$$s := \text{evalf} \left( \sum_{k=1}^{A[i]} \frac{f\left(\frac{k-1}{A[i]}\right)}{A[i]}, \right) : S := \text{evalf} \left( \sum_{k=1}^{A[i]} \frac{f\left(\frac{k}{A[i]}\right)}{A[i]}, \right) : \varepsilon := S - s;$$

$E := (S + s) * (1/2) :$

*print*( $s, S, \text{epsilon}, E$ )

*end do* :

Геометрично левите и десните суми в (13) са сумите на лицата на правоъгълници с основа  $\frac{1}{n}$  и височини съответно  $\left(\frac{k-1}{n}\right)^2$  и  $\left(\frac{k}{n}\right)^2$  (Фиг. 4). От графиката виждаме, че лявата



Фигура 4: Изминат път при скорост  $v(t) = t^2$

сума е сумата от лицата на сините правоъгълници, а дясната сума е сумата от лицата на сините правоъгълници и червените правоъгълници.

От таблицата и графиката забелязваме, че разликата на левите и десните суми става все по-малка и може би ще клони към нула, ако броят на деленията клони към безкрайност. От (Фиг. 4) можем да предположим, че изминатият път е лицето на фигурата заключена между графиката на функцията  $f(x) = x^2$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$  и  $y = 1$ .

## 2.1 Суми на Риман.

**Определение 2.1** Деление на интервала  $[a, b]$  наричаме точките  $\{x_k\}_{k=0}^n$ , ако удовлетворяват неравенствата  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  и означаваме с  $\{x\}$ .

Всяко деление може да бъде разглеждано и като множество.

**Определение 2.2** Делението  $\{y\}$  на интервала  $[a, b]$  наричаме дробно на делението  $\{x\}$ , ако  $\{x\} \subset \{y\}$ .

**Определение 2.3** Делението  $\{x\}$  на интервала  $[a, b]$  наричаме обединение на деленията  $\{y\}$  и  $\{z\}$ , ако  $\{x\} = \{y\} \cup \{z\}$ .

От Определение 2.2 и Определение 2.3 следва, че обединението на две деления е дробно деление на всяко едно от тях.

**Определение 2.4** Нека  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\{x\}$  е деление на интервала  $[a, b]$  и  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ . Интегрална сума наричаме числото

$$\sigma(f, \{x\}, \{\xi_k\}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k,$$

където използваме означението  $\Delta x_k = (x_k - x_{k-1})$ .

Ще отбележим, че интегралната сума  $\sigma(f, \{x\}, \{\xi_k\})$  зависи както от избора на делението  $\{x\}$ , така и от избора на точките  $\{\xi_k\}$ . Интервалите  $[x_{k-1}, x_k]$  наричаме частични интервали, а точките  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$  наричаме междинни точки.

**Определение 2.5** Диаметър на делението  $\{x\}$  наричаме числото

$$d(\{x\}) = \max\{x_k - x_{k-1} : 1 \leq k \leq n\} = \max\{\Delta x_k : 1 \leq k \leq n\}.$$

Диаметърът на едно деление зависи от самото деление  $\{x\}$ , затова коректният запис е  $d(\{x\})$ . Когато няма опасност от недоразумение ще използваме съкратеното изписване  $d$  вместо  $d(\{x\})$

**Определение 2.6** Казваме, че числото  $I$  е граница на интегралните суми  $\sigma(f, \{x_k\}, \{\xi_k\})$  при диаметър на деленията  $d$ , клонящ към нула, ако за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува  $\delta > 0$ , така че за всяко деление, което удовлетворява  $d < \delta$  и при произволен избор на междинните точки  $\{\xi_k\}$  е изпълнено неравенството

$$|I - \sigma(f, \{x_k\}, \{\xi_k\})| < \varepsilon.$$

Лесно се съобразява, че ако съществува граница на интегралните суми  $I$ , то тя е единствена. Когато границата на интегралните суми при диаметър, клонящ към нула съществува, използваме означението  $I = \lim_{d \rightarrow 0} \sigma(f, \{x_k\}, \{\xi_k\})$ .

Определение 2.6 дефинира границата  $I$  на езика  $\varepsilon - \delta$ . Ще дадем еквивалентна формулировка на Определение 2.6 на езика на числовите редици.

**Определение 2.7** Нека  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  е произволна редица от деления на интервала  $[a, b]$ . Казваме, че редицата от деления  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  е нормална, ако редицата от диаметри  $\{d(\lambda_n)\}_{n=1}^{\infty}$  е сходяща към нула.

**Пример 2.1** Нека разгледаме редицата  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  от деления на интервала  $[a, b]$ , където  $\lambda_n$  разделя интервала на  $n$  равни части.

Да означим точките от делението  $\lambda_n = \{x_i^n\}_{i=0}^n$ . Веднага се съобразява, че  $x_i = a + i \frac{b-a}{n}$  за  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ . От  $d(\lambda_n) = \frac{b-a}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  следва, че така дефинираната редица е нормална.

**Определение 2.8** Казваме, че числото  $I$  е граница на интегралните суми  $\sigma(f, \{x_k\}, \{\xi_k\})$ , ако за всяка нормална редица от деления  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  редицата от интегрални суми  $\sigma_n(f, \lambda_n, \{\xi_k\})$  клони към  $I$  независимо от избора на междинните точки  $\{\xi_k\}$ .



**Теорема 2.1** *Интегралните суми  $\sigma(f, \{x_k\}, \{\xi_k\})$  са сходящи при  $d$ , клонящо към нула, тогава и само тогава, когато редицата от интегрални суми  $\sigma_n(f, \lambda_n, \{\xi\})$  е сходяща за всяка нормална редица от деления.*

Доказателството е аналогично на това за еквивалентност на двете дефиниции за граница на функция.

**Определение 2.9** *Казваме, че функцията  $f$  е интегрируема по Риман в интервала  $[a, b]$ , ако съществува границата  $I = \lim_{d \rightarrow 0} \sigma(f, \{x_k\}, \{\xi_k\})$ .*

Числото  $I$  наричаме определен интеграл на Риман на функцията  $f$  в интервала  $[a, b]$  и означаваме със символа

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Числото  $a$  наричаме долна граница на интегрирането, числото  $b$  наричаме горна граница на интегрирането, а променливата  $x$  наричаме интеграционна променлива и можем да я означаваме с произволна буква, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(s)ds.$$

Бащата на Георг Фридрих Бернхард Риман (1826 – 1866) е бил лутерански свещеник. Бернхард бил 2-то от общо 6 деца – 2 момчета и 4 момичета. До неговата 10-та година го обучава баща му, на когото помага и начален учител от местното училище. През 1840 г. Риман влиза направо в 3 клас на лицей в Хановер. Докато учил там, живее при баба си, но през 1842 г. тя умира и той се премества в гимназия в Люнебург. Макар да е добър ученик, Риман не блести с нищо особено. Показва интерес към математиката и директорът на гимназията му позволява да чете математически книги от своята собствена библиотека.

През пролетта на 1846 г. Риман се записва в Гьотингенския университет. Неговият баща го окуражава да влезе в Теологическия факултет. След като посещава няколко лекции по математика, той пита баща си дали не може да се прехвърли във Факултета по философия, за да може да учи математика. Риман в голяма степен се съобразява с желанията на семейството си и не предприема важни стъпки без разрешението на баща си. Когато той му позволява, Риман започва да посещава курсовете по математика на Мориц Стерн и Карл Фридрих Гаус. Гаус и Стерн скоро откриват гения на Риман.

През пролетта на 1847 г. Риман се мести от Гьотинген в Берлинския университет, където преподаватели му са Петер Густав Льовжон Дирихле, Карл Якоби, Якоб Щайнер. Това време е много ползотворно за него. Най-важният човек, повлиял на Риман по онова време обаче, без съмнение е Дирихле. През този си период Риман започва работа върху свой основен труд – „Теория на комплексните променливи“.

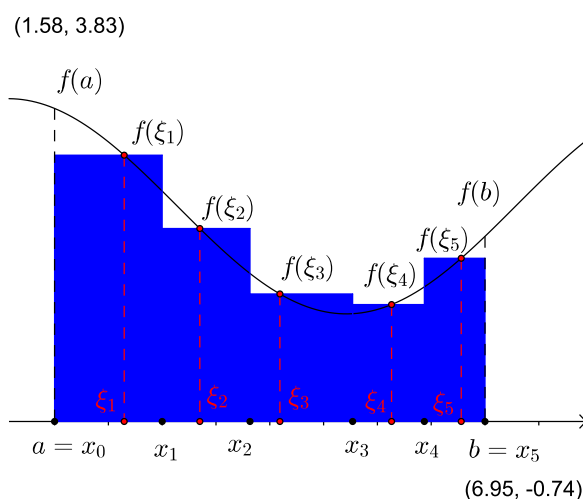


Фигура 5: Georg Friedrich Bernhard Riemann

През 1849 г. Риман се връща в Гьотинген и неговата дисертация под ръководството на Гаус е публикувана през 1851 г. Но Гаус не е единственият, който му оказва влияние.

Риман чете първите си лекции през 1854 г., които полагат основите на Римановата геометрия и по този начин създават почвата за общата теория за относителността на Алберт Айнщайн

**Пример 2.2** Нека  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Да разгледаме фигурата, ограничена от графиката на функцията  $f$ , правите  $x = a$ ,  $x = b$  и интервала  $[a, b]$ . За делението  $\{x\}$  и междинните точки  $\{\xi\}$  интегралната сума  $\sigma(f, \{x_k\}, \{\xi\})$  представлява лицето на заштрихованата фигура, която се състои от  $n$  на брой правоъгълника с дължини на страните  $\Delta x_k$  и  $f(\xi_k)$  (Фиг. 6).



Фигура 6: Геометрична интерпретация на интегралните суми

**Пример 2.3** Нека  $f \equiv c$ -константа. Да се пресметне  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b cdx$ .

За всяко деление  $\{x\}$  на интервала  $[a, b]$  и за всеки избор на междинните точки  $\{\xi\}$  е изпълнено  $f(\xi_k) = c$ . Тогава от равенството

$$\sigma(f, \{x\}, \{\xi\}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = c \sum_{k=1}^n \Delta x_k = c(b - a)$$

следва, че  $\int_a^b f(x)dx = \lim_{d \rightarrow 0} \sigma(f, \{x_k\}, \{\xi_k\}) = c(b - a)$ .

**Пример 2.4** *Функцията на Дирихле*

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

не е интегрируема в интервала  $[0, 1]$ .

Нека да изберем произволно деление  $\{x\}$  на интервала  $[0, 1]$ . Във всеки от частичните интервали  $[x_{k-1}, x_k]$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  съществуват както рационално число  $\xi_k$ , така и ирационално число  $\eta_k$ . Тогава интегралните суми  $\sigma$  са равни на

$$\sigma(D, \{x\}, \{\xi\}) = \sum_{k=1}^n D(\xi_k) \Delta_k = \sum_{k=1}^n \Delta_k = 1$$

и

$$\sigma(D, \{x\}, \{\eta\}) = \sum_{k=1}^n D(\eta_k) \Delta_k = 0.$$

Следователно интегралните суми  $\sigma$  на функцията на Дирихле, нямат граница, когато диаметърът на деленията клони към нула.

**Пример 2.5** *Ако  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  е неограничена функция, то тя не е интегрируема.*

Ако функцията е неограничена, тогава за всяко деление  $\{x\}$  съществува интервал  $[x_{k-1}, x_k]$ , в който функцията е неограничена, т.е. за всяко  $M$  съществува  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ , така че  $|f(\xi_k)| \geq M$ . Нека за всяко деление да положим  $\sigma_1 = \left| \sum_{i \neq k} f(\xi_i) \Delta_i \right|$ . Тогава е изпълнено неравенството

$$|\sigma(f, \{x\}, \{\xi\})| = \left| f(\xi_k) \Delta_k + \sum_{i \neq k} f(\xi_i) \Delta_i \right| \geq |f(\xi_k)| \Delta_k - \left| \sum_{i \neq k} f(\xi_i) \Delta_i \right|.$$

Избираме  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ , така че  $|f(\xi_k)| \geq \frac{M + \sigma_1}{\Delta_k}$  и получаваме

$$|\sigma(f, \{x\}, \{\xi\})| = \left| f(\xi_k) \Delta_k + \sum_{i \neq k} f(\xi_i) \Delta_i \right| \geq |f(\xi_k)| \Delta_k - \left| \sum_{i \neq k} f(\xi_i) \Delta_i \right| \geq M + \sigma_1 - \sigma_1 = M.$$

Следователно за всяко деление  $\{x\}$  и всяко  $M$  съществуват междинни точки  $\{\xi\}$ , така че  $|\sigma(f, \{x\}, \{\xi\})| \geq M$ , което означава, че интегралните суми  $\sigma$  нямат граница, когато диаметърът на деленията клони към нула.

**Задачи:**

1) Намерете интегралните суми при деления  $\lambda_n$  на интервала  $[a, b]$  на  $n$  равни части и междинни точки, които са среди на интервалите. Пресметнете границите  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f, \lambda_n, \{\xi\})$

- а)  $[0, 1]$ ,  $f(x) = 1 + x$ ; б)  $[0, 1]$ ,  $f(x) = x^2$ ; в)  $[0, 1]$ ,  $f(x) = 2^x$ ; г)  $[0, 1]$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$ ;  
 д)  $[1, 5]$ ,  $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ ; е)  $[1, 4]$ ,  $f(x) = x^2$ ; ж)  $[-1, 1]$ ,  $f(x) = 2^x$ ; з)  $[-2, 4]$ ,  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ .

2) Пресметнете определените интеграли, като ги разгледате като граница на интегрални суми с подходящо подбрани деления

- а)  $\int_{-1}^2 x^2 dx$ ; б)  $\int_0^1 e^x dx$ ; в)  $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$ ; г)  $\int_0^{\pi} \cos x dx$ ; д)  $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$ ; е)  $\int_0^2 x^m dx$ ; ж)  $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{x}$ .

## 2.2 Голяма и малка суми на Дарбу

От Пример 2.5 следва, че при изследване на итегруемите функции можем да се ограничим само до ограничените функции.

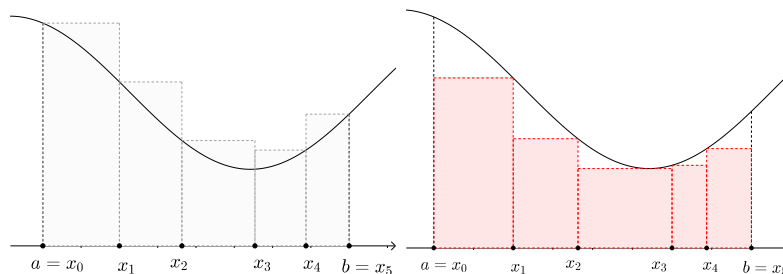
**Определение 2.10** Нека  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е ограничена функция и  $\{x\}$  е деление на интервала  $[a, b]$ . Полагаме  $M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$  и  $m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ . Сумата

$$S(f, \{x\}) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta_k$$

наричаме голяма сума на Дарбу на функцията  $f$  за делението  $\{x\}$ . Сумата

$$s(f, \{x\}) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta_k$$

наричаме малка сума на Дарбу на функцията  $f$  за делението  $\{x\}$ .

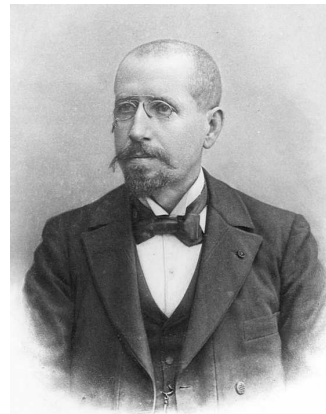


Фигура 7: Геометрична интерпретация на големите и малките суми на Дарбу

Да разгледаме фигурата ограничена от графиката на функцията  $f$ , правите  $x = a$ ,  $x = b$  и координатната ос  $O_x$ . Нека  $\{x\}$  е произволно деление на интервала  $[a, b]$ . Тогава

голямата сума на Дарбу представлява сумата от лицата на  $n$  на брой правоъгълника с дължини на страните  $M_k$  и  $\Delta_k$  (Фиг. 7 в ляво), а малката сума на Дарбу представлява сумата от лицата на  $n$  на брой правоъгълника с дължини на страните  $m_k$  и  $\Delta_k$  (Фиг. 7 в дясно).

Дарбу (1842–1917) е роден Ним във Франция. Учил е в лицейте в Ним и Монпелие преди да бъде приет в Сорбоната. Дарбу има важни приноси към геометрията и математическия анализ. Бил е биограф на Анри Поанкаре и е редактор на избраните творби на Жозеф Фурие. Дарбу защитава докторска дисертация в *Ecole Normale Supérieure* през 1866 г. През 1900 г. той е назначен за постоянен секретар на академията в математическата секция. Студенти са му били Емил Борел, Ели Картан. През 1902 г. е избран за член на Кралското общество; през 1916 г. той получава *Sylvester Medal* от Кралското общество. Има много термини в математиката, които носят неговото име, като базис на Дарбу, уравнение на Дарбу, трансформация на Дарбу и много други.



Фигура 8: Darboux

**Лема 2.1** Нека  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е ограничена функция и  $\{x\}$  е деление на интервала  $[a, b]$ . Тогава са изпълнени неравенствата

$$s(f, \{x\}) \leq \sigma(f, \{x\}, \{\xi\}) \leq S(f, \{x\})$$

за всеки избор на междинните точки  $\{\xi\}$ .

**Доказателство:** От дефиницията на числата  $M_k$  и  $m_k$  следва верността на неравенствата  $m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k$  за всяко  $k = 1, 2, \dots, n$ . Следователно са изпълнени неравенствата

$$\sum_{k=1}^n m_k \Delta_k \leq \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta_k \leq \sum_{k=1}^n M_k \Delta_k.$$

□

**Лема 2.2** Нека  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е ограничена функция и  $\{x\}$  е деление на интервала  $[a, b]$ . Тогава за всяко  $\varepsilon > 0$  съществуват междинни точки  $\{\xi\}$  и  $\{\eta\}$ , така че да са изпълнени неравенствата:

$$(14) \quad 0 \leq S(f, \{x\}) - \sigma(f, \{x\}, \{\xi\}) < \varepsilon$$

и

$$(15) \quad 0 \leq \sigma(f, \{x\}, \{\eta\}) - s(f, \{x\}) < \varepsilon.$$

**Доказателство:** Ще докажем неравенство (14). Нека  $\{x\}$  е произволно деление на интервала  $[a, b]$  и  $\varepsilon > 0$  е произволно избрано. От дефиницията на  $M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$

следва, че съществува  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ , така че  $M_k - \frac{\varepsilon}{b-a} \leq f(\xi_k) \leq M_k$ . За така избраните междинни точки  $\{\xi\}$  е изпълнено неравенството

$$0 \leq \sum_{k=1}^n M_k \Delta_k - \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta_k = \sum_{k=1}^n (M_k - f(\xi_k)) \Delta_k \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n \Delta_k = \varepsilon.$$

Доказателството на (15) е аналогично.  $\square$

**Следствие 2.1** Нека  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е ограничена функция и  $\{x\}$  е деление на интервала  $[a, b]$ . Тогава са верни равенствата:

$$S(f, \{x\}) = \sup\{\sigma(f, \{x\}, \{\xi\}) : \{\xi\}\}$$

и

$$s(f, \{x\}) = \inf\{\sigma(f, \{x\}, \{\xi\}) : \{\xi\}\}.$$

**Лема 2.3** Нека  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е ограничена функция,  $\{x\}$  е деление на интервала  $[a, b]$  и  $\{y\}$  е дробно деление на  $\{x\}$ . Тогава са верни неравенствата:

$$S(f, \{x\}) \geq S(f, \{y\})$$

и

$$s(f, \{x\}) \leq s(f, \{y\}).$$

**Доказателство:** Нека делението  $\{y\}$  се получава от  $\{x\}$  с добавянето на една точка  $y \in (x_{k-1}, x_k)$ . Да положим  $M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ ,  $M'_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, y]\}$ ,  $M''_k = \sup\{f(x) : x \in [y, x_k]\}$ . Тогава

$$\begin{aligned} S(f, \{x\}) &= \sum_{i=1}^{k-1} M_i \Delta_i + M_k \Delta_k + \sum_{i=k+1}^n M_i \Delta_i \\ &\geq \sum_{i=1}^{k-1} M_i \Delta_i + M'_k (y - x_{k-1}) + M''_k (x_k - y) + \sum_{i=k+1}^n M_i \Delta_i = S(f, \{y\}). \end{aligned}$$

Случаят, когато дробното деление се получава с добавянето на повече от една точка се свежда до доказаното.

Аналогично се доказва и неравенството за малките суми на Дарбу.  $\square$

**Лема 2.4** Нека  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е ограничена функция,  $\{x\}$  и  $\{y\}$  са деления на интервала  $[a, b]$ . Тогава в сила е неравенството:

$$s(f, \{x\}) \leq S(f, \{y\}).$$

**Доказателство:** Нека  $\{x\}$  и  $\{y\}$  са две произволни деления на интервала  $[a, b]$ . Да положим  $\{z\} = \{x\} \cup \{y\}$ . Според Лема 2.3 и Лема 2.1 са в сила неравенствата:

$$s(f, \{x\}) \leq s(f, \{z\}) \leq S(f, \{z\}) \leq S(f, \{y\}).$$

□

**Следствие 2.2** Нека  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е ограничена функция. Множеството от всички малки суми на Дарбу е ограничено отгоре и множеството от всички големи суми на Дарбу е ограничено отдолу.

**Доказателство:** Всяка малка сума е по-малка от която и да е голяма сума. Следователно малките суми са ограничени отгоре. Всяка голяма сума е по-голяма от която и да е малка сума. Следователно големите суми са ограничени отдолу. □

**Определение 2.11** Нека  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е ограничена функция. Точната горна граница  $I_*$  на множеството на всички долни суми на Дарбу за функцията  $f$  наричаме долен интеграл на Дарбу. Точната долна граница  $I^*$  на множеството на всички горни суми на Дарбу за функцията  $f$  наричаме горен интеграл на Дарбу.

**Лема 2.5** Нека  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е ограничена функция. Тогава в сила е неравенството:

$$I_* \leq I^*.$$

**Доказателство:** Да допуснем противното, т.е.  $I_* > I^*$ . Да положим  $\varepsilon = I_* - I^* > 0$ . От дефиницията на  $I_*$  и  $I^*$  следва, че съществуват деления  $\{x\}$  и  $\{y\}$  на интервала  $[a, b]$ , така че  $S(f, \{x\}) < I^* + \frac{\varepsilon}{2}$  и  $s(f, \{y\}) > I_* - \frac{\varepsilon}{2}$ . Следователно са изпълнени неравенствата

$$s(f, \{y\}) - S(f, \{x\}) > I_* - \frac{\varepsilon}{2} - I^* - \frac{\varepsilon}{2} = I_* - I^* - \varepsilon = 0,$$

което е противоречие с Лема 2.3. Следователно допускането не е вярно. □

**Лема 2.6** Нека  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е ограничена функция,  $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$ ,  $m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$ ,  $\{x\}$  е деление на интервала  $[a, b]$  с диаметър  $d$ . Ако  $\{y\}$  е дробно деление на  $\{x\}$ , получено чрез добавянето на  $l$  точки, тогава са в сила неравенствата:

$$S(f, \{x\}) - S(f, \{y\}) \leq (M - m)ld$$

и

$$s(f, \{y\}) - s(f, \{x\}) \leq (M - m)ld.$$

**Доказателство:** Нека  $\{y\}$  се получава с добавянето на точките  $y_i \in [x_{k_i-1}, x_{k_i}]$ . Големите суми на Дарбу по деленията  $\{x\}$  и  $\{y\}$  се различават само върху интервалите  $\{[x_{k_i-1}, x_{k_i}]\}_{i=1}^l$ . Да означим  $M'_{k_i} = \sup\{f(x) : x \in [x_{k_i-1}, y_i]\}$  и  $M''_{k_i} = \sup\{f(x) : x \in [y_i, x_{k_i}]\}$ . От неравенствата

$$\begin{aligned} S(f, \{x\}) - S(f, \{y\}) &= \sum_{i=1}^l (M_{k_i} \Delta_{k_i} - (M'_{k_i}(y_i - x_{k_i-1}) + M''_{k_i}(x_{k_i} - y_i))) \\ &\leq \sum_{i=1}^l (M \Delta_{k_i} - (m(y_i - x_{k_i-1}) + m(x_{k_i} - y_i))) \\ &= \sum_{i=1}^l (M - m) \Delta_{k_i} \leq \sum_{i=1}^l (M - m) d = (M - m) l d \end{aligned}$$

следва доказателството на Лемата за големите суми.

Доказателството за малките суми е аналогично.  $\square$

**Определение 2.12** Нека  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е ограничена функция. Казваме, че числото  $A$  е граница на големите суми на Дарбу, когато диаметърът клони към нула, ако за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува  $\delta > 0$ , така че при всяко деление с диаметър по-малък от  $\delta$  е изпълнено неравенството

$$|S - A| < \varepsilon.$$

Казваме, че числото  $B$  е граница на малките суми на Дарбу, когато диаметърът клони към нула, ако за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува  $\delta > 0$ , така че при всяко деление с диаметър по-малък от  $\delta$  е изпълнено неравенството

$$|s - B| < \varepsilon.$$

**Лема 2.7** Нека  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е ограничена функция. Тогава

- 1) Горният интеграл на Дарбу е граница на големите суми на Дарбу при диаметър, клонящ към нула;
- 2) Долният интеграл на Дарбу е граница на малките суми на Дарбу при диаметър, клонящ към нула.

**Доказателство:** Ако функцията  $f$  е константа в интервала  $[a, b]$ , то доказателството е тривиално.

Нека  $f$  не е константа. Тогава  $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} > m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$ . Нека  $\varepsilon > 0$  е произволно. Съществува деление  $\{x\}$ , така че  $S(f, \{x\}) - I^* < \frac{\varepsilon}{2}$ . Да положим  $l$  да е броя на точките на делението  $\{x\}$ , които са различни от краищата на интервала. Нека  $\{y\}$  е произволно деление с радиус по-малък от  $\delta = \frac{\varepsilon}{2(M - m)l}$ . Да разгледаме делението  $\{z\}$ , получено като обединение на деленията  $\{x\}$  и  $\{y\}$ , т.е.  $z$  се получава, като



към  $\{y\}$  се добавят точките на  $\{x\}$ , различни от краищата на интервала, т.е.  $l$ -на брой точки. Съгласно Лема 2.6 получаваме неравенството

$$0 \leq S(f, \{y\}) - S(f, \{z\}) \leq (M - m)ld < \frac{\varepsilon}{2}.$$

От Лема 2.3 получаваме неравенството

$$I^* \leq S(f, \{z\}) \leq S(f, \{x\})$$

и следователно  $0 \leq S(f, \{z\}) - I^* \leq S(f, \{x\}) - I^* < \frac{\varepsilon}{2}$ . От неравенството на триъгълника получаваме, че е в сила

$$|S(f, \{y\}) - I^*| \leq |S(f, \{y\}) - S(f, \{z\})| + |S(f, \{z\}) - I^*| < \varepsilon,$$

с което 1) е доказано.

Доказателството, че долният интеграл на Дарбу е граница на малките суми на Дарбу при диаметър, клонящ към нула, се провежда аналогично.  $\square$

**Теорема 2.2** *Нека  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е ограничена функция. Функцията  $f$  е интегрируема в интервала  $[a, b]$  тогава и само тогава, когато  $I_* = I^*$ .*

**Доказателство:** Нека функцията  $f$  да бъде интегрируема в интервала  $[a, b]$ . Тогава съществува границата  $I = \lim_{d \rightarrow 0} \sigma(f, \{x\}, \{\xi\})$ . Следователно за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува  $\delta > 0$ , така че за всяко деление с диаметър по-малък от  $\delta$  и за всеки избор на междинните точки е изпълнено неравенството

$$|I - \sigma(f, \{x\}, \{\xi\})| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Според Лема 2.3 съществуват междинни точки  $\{\xi\}$  и  $\{\eta\}$ , такива че са изпълнени неравенствата

$$S(f, \{x\}) - \sigma(f, \{x\}, \{\xi\}) \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

и

$$\sigma(f, \{x\}, \{\eta\}) - s(f, \{x\}) \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Следователно получаваме неравенствата

$$\begin{aligned} I^* - I_* &\leq S(f, \{x\}) - s(f, \{x\}) \\ &\leq |S(f, \{x\}) - \sigma(f, \{x\}, \{\xi\})| + |\sigma(f, \{x\}, \{\xi\}) - I| \\ &\quad + |I - \sigma(f, \{x\}, \{\eta\})| + |\sigma(f, \{x\}, \{\eta\}) - s(f, \{x\})| < \varepsilon. \end{aligned}$$

От произволният избор на  $\varepsilon > 0$  следва, че  $I_* = I^*$ .

Нека горният и долният интеграл на Дарбу са равни. Да положим  $A = I^* = I_*$ . Според Лема 2.7 са в сила равенствата

$$\lim_{d \rightarrow 0} S(f, \{x\}) = A = \lim_{d \rightarrow 0} s(f, \{x\}).$$

Следователно за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува  $\delta > 0$ , така че за всяко деление с диаметър по-малък от  $\delta$  са изпълнени неравенствата  $S(f, \{x\}) - A < \varepsilon$  и  $A - s(f, \{x\}) < \varepsilon$ . За всяко деление  $\{x\}$ , което е с диаметър по-малък от  $\delta$  и за произволно избрани междинни точки  $\{\xi\}$  са изпълнени неравенствата

$$A - \varepsilon < s \leq \sigma(f, \{x\}, \{\xi\}) \leq S < A + \varepsilon$$

и следователно  $A = \lim_{d \rightarrow 0} \sigma(f, \{x\}, \{\xi\})$ . □

**Теорема 2.3** Нека  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е ограничена функция. Функцията  $f$  е интегрируема в интервала  $[a, b]$  тогава и само тогава, когато за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува  $\delta > 0$ , такова че за всяко деление  $\{x\}$  с диаметър по-малък от  $\delta$  е изпълнено неравенството

$$(16) \quad S(f, \{x\}) - s(f, \{x\}) < \varepsilon.$$

**Доказателство:** Нека  $f$  е интегрируема. Според Теорема 2.2 за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува  $\delta > 0$ , такова че за всяко деление  $\{x\}$  с диаметър по-малък от  $\delta$  е изпълнено неравенството  $S(f, \{x\}) - s(f, \{x\}) < \varepsilon$ .

Нека е изпълнено условието (16), т.е. за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува  $\delta > 0$ , такова че за всяко деление  $\{x\}$  с диаметър по-малък от  $\delta$  е изпълнено неравенството  $S(f, \{x\}) - s(f, \{x\}) < \varepsilon$ . Тогава от неравенството

$$s(f, \{x\}) \leq I_* \leq I^* \leq S(f, \{x\})$$

и произволния избор на  $\varepsilon$  следва, че  $I_* = I^*$  и съгласно Теорема 2.2 функцията  $f$  е интегрируема. □

ЗАДАЧИ:

1) Намерете големите и малките суми на Дарбу за интеграла  $\int_0^\pi \sin x dx$  при 3 и 6 деления на интервала  $[0, \pi]$ .

2) Намерете големите и малките суми на Дарбу за интеграла  $\int_a^b f(x) dx$  при 2, 3, 4, 6 и  $n$  деления на интервала  $[a, b]$ , ако

а)  $[0, 1]$ ,  $f(x) = 1 + x$ ; б)  $[0, 1]$ ,  $f(x) = x^2$ ; в)  $[0, 1]$ ,  $f(x) = 2^x$ ; г)  $[0, 1]$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$ ;

д)  $[1, 5]$ ,  $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ ; е)  $[1, 4]$ ,  $f(x) = x^2$ ; ж)  $[-1, 1]$ ,  $f(x) = 2^x$ ; з)  $[-2, 4]$ ,  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ .

3) При  $\varepsilon = 0,1$ ;  $\varepsilon = 0,01$  и  $\varepsilon = 0,001$  намерете  $\delta$ , така че, ако  $d < \delta$  да е изпълнено неравенството  $S_n - s_n < \varepsilon$ :

а)  $\int_0^1 x^2 dx$ ; б)  $\int_0^1 e^x dx$ ; в)  $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$ ; г)  $\int_0^{\pi} \cos x dx$ ; д)  $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$ ; е)  $\int_0^2 x^3 dx$ .

### 2.3 Класове интегрируеми функции

**Теорема 2.4** Ако функцията  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е непрекъсната в  $[a, b]$ , то тя е интегрируема в  $[a, b]$ .

**Доказателство:** Функцията  $f$  е непрекъсната в интервала  $[a, b]$  и следователно е равномерно непрекъсната. Избираме произволно  $\varepsilon > 0$ . От равномерната непрекъснатост на  $f$  следва, че съществува  $\delta > 0$ , така че е изпълнено неравенството  $|f(\xi) - f(\eta)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$  за всеки  $\xi, \eta \in [a, b]$ , които удовлетворяват неравенството  $|\xi - \eta| < \delta$ . От избора на  $\delta$  получаваме, че за всяко деление  $\{x\}$  с диаметър по-малък от  $\delta$  е изпълнено неравенството

$$S(f, \{x\}) - s(f, \{x\}) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta_k < \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a} \Delta_k = \varepsilon.$$

Съгласно Теорема 2.3 функцията  $f$  е интегрируема. □

**Теорема 2.5** Нека  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е ограничена функция. Ако за всяко  $\varepsilon > 0$  съществуват краен брой отворени интервали с обща дължина по-малка от  $\varepsilon$ , които покриват всичките точки на прекъсване на  $f$ , то функцията  $f$  е интегрируема в  $[a, b]$ .

**Доказателство:** Да означим  $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$  и  $m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$ . Да отбележим, че ако  $M = m$ , то функцията  $f$  е константа и следователно според Теорема 2.4 тя е интегрируема.

Нека  $M > m$ . Избираме произволно  $\varepsilon > 0$ . Покриваме точките на прекъсване на функцията  $f$  с отворени интервали с обща дължина по-малка от  $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2(M-m)}$ . Нека да означим множеството от така избраните интервали с  $\Delta$ . Точките, които принадлежат на множеството  $X = [a, b] \setminus \Delta$  образуват множество, което се състои от краен брой непресичащи се затворени интервали. Нека положим  $[a, b] \setminus \Delta = \bigcup_{i=1}^p [a_i, b_i]$ . От равномерната непрекъснатост на  $f$  в  $[a_i, b_i]$  следва, че за всяко  $i$  съществува  $\delta_i > 0$ , така че  $|f(\xi_i) - f(\eta_i)| < \frac{\varepsilon}{2(M-m)}$  за всеки  $\xi_i, \eta_i \in [a_i, b_i]$ , които удовлетворяват  $|\xi_i - \eta_i| < \delta_i$ .

Да положим  $\delta = \min\{\delta_i : i = 1, 2, \dots, p\}$ . Нека изберем деление  $\{x\}$  на  $[a, b]$ , което има диаметър по-малък от  $\delta$ . Добавяме към делението  $\{x\}$  и точките, които са краища на интервалите, образувачи  $\Delta$  и означаваме новото деление с  $\{y\}$ . Разделяме сумата

$\sum_{j=1}^n (M_j - m_j)(y_j - y_{j-1})$ , на две суми. В едната влизат точките, които са от множеството  $\Delta$ , а в другата точките, които не са от множеството  $\Delta$ . От неравенството

$$\begin{aligned} S(f, \{x\}) - s(f, \{x\}) &= \sum_{j=1}^n (M_j - m_j)(y_j - y_{j-1}) \\ &= \sum_{\Delta_j \subset \Delta} (M_j - m_j)\Delta_j + \sum_{\Delta_j \subset X} (M_j - m_j)\Delta_j \\ &\leq (M - m) \sum_{\Delta_j \subset \Delta} \Delta_j + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{\Delta_j \subset X} \Delta_j \leq \frac{(M-m)\varepsilon}{2(M-m)} + \frac{\varepsilon(b-a)}{2(b-a)} = \varepsilon \end{aligned}$$

и Теорема 2.3 следва, че  $f$  е интегрируема в интервала  $[a, b]$ .  $\square$

**Следствие 2.3** Нека  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е ограничена функция, която е непрекъсната с изключение на краен брой точки. Тогава  $f$  е интегрируема в  $[a, b]$ .

**Доказателство:** Нека точките на прекъсване на  $f$  са  $x_i, i = 1, 2, \dots, p$ . Нека  $\varepsilon > 0$  е произволно. Покриваме всяка от точките  $x_i$  с интервала  $\left(x_i - \frac{\varepsilon}{2p}, x_i + \frac{\varepsilon}{2p}\right)$ . Общата дължина на интервалите, които покриват всички точки на прекъсване е  $\varepsilon$  и съгласно Теорема 2.5 функцията  $f$  е интегрируема в  $[a, b]$ .  $\square$

**Следствие 2.4** Нека  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е интегрируема функция в интервала  $[a, b]$  и  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е ограничена функция. Ако  $g$  се различава от  $f$  в краен брой точки, то  $g$  е интегрируема функция и  $\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ .

**Теорема 2.6** Ако  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е монотонна функция, то тя е интегрируема в  $[a, b]$ .

**Доказателство:** Ако  $f$  е константа, то тя е интегрируема.

Нека  $f$  е ненамаляваща функция, която е различна от константа. Тогава  $f(b) > f(a)$ . Нека  $\varepsilon > 0$  е произволно. Избираме деление  $\{x\}$  на интервала  $[a, b]$  с диаметър по-малък от  $\frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ . От неравенството

$$\begin{aligned} S(f, \{x\}) - s(f, \{x\}) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)\Delta_i < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \\ &= \frac{\varepsilon(f(x_1) - f(a) + f(x_2) - f(x_1) + \dots + f(b) - f(x_{n-1}))}{f(b) - f(a)} \\ &= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(b) - f(a)) = \varepsilon \end{aligned}$$

и Теорема 2.3 следва, че  $f$  е интегрируема в интервала  $[a, b]$ .  $\square$

**Теорема 2.7** Нека  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е интегрируема и  $\varphi : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$  е Липшицова, където

$$M = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \quad m = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Тогава функцията  $g = \varphi(f) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е интегрируема.

**Доказателство:** Нека  $C > 0$  е Липшицовата константа за функцията  $\varphi$ , т.е.  $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C|x - y|$  за всеки  $x, y \in [m, M]$ . За всяко  $\varepsilon > 0$  можем да изберем деление  $\{x\}$  на интервала  $[a, b]$ , така че  $S(f, \{x\}) - s(f, \{x\}) < \frac{\varepsilon}{C}$ . Да означим

$$M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \quad m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

и

$$N_k = \sup\{g(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \quad n_k = \inf\{g(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

От условията на теоремата получаваме, че неравенството

$$|g(x) - g(y)| = |\varphi(f(x)) - \varphi(f(y))| \leq C|f(x) - f(y)| = C(M_k - m_k)$$

е изпълнено за произволни  $x, y \in [x_{k-1}, x_k]$ . Следователно в сила е неравенството

$$N_k - n_k \leq C(M_k - m_k).$$

От неравенството

$$S(g, \{x\}) - s(g, \{x\}) = \sum_{k=1}^n (N_k - n_k) \Delta_k \leq C \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta_k \leq C (S(f, \{x\}) - s(f, \{x\})) < \varepsilon$$

и Теорема 2.3 следва, че  $g$  е интегрируема в интервала  $[a, b]$ . □

**Теорема 2.8** Нека  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е интегрируема и  $\varphi : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$  е непрекъсната, където

$$M = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \quad m = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Тогава функцията  $g = \varphi(f) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е интегрируема в  $[a, b]$ .

**Доказателство:** Да положим  $C = \max\{|\varphi(x)| : x \in [m, M]\}$ . Избираме произволно  $\varepsilon > 0$ . От равномерната непрекъснатост на  $\varphi$  следва, че съществува  $\delta > 0$ , така че неравенството  $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a + 2C}$  е изпълнено винаги, когато  $|x - y| < \delta$ . Нека изберем  $\delta < \frac{\varepsilon}{b - a + 2C}$ . От интегрируемостта на функцията  $f$  следва, че съществува деление  $\{x\}$  на интервала  $[a, b]$ , така че  $S(f, \{x\}) - s(f, \{x\}) < \delta^2$ .

Да означим

$$M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \quad m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

и

$$N_k = \sup\{g(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \quad n_k = \inf\{g(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Нека разделим множеството от индексите  $\{1, 2, \dots, n\}$  на делението на две множества

$$A = \{i : M_i - m_i < \delta\} \quad \text{и} \quad B = \{i : M_i - m_i \geq \delta\}.$$

За всеки две  $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $i \in A$  е изпълнено неравенството

$$|g(x) - g(y)| = |\varphi(f(x)) - \varphi(f(y))| < \frac{\varepsilon}{b - a + 2C},$$

защото  $\varphi$  е равномерно непрекъсната и  $|f(x) - f(y)| \leq |M_i - m_i| < \delta$ . От произволния избор на  $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$  следва, че е в сила неравенството

$$N_k - n_k < \frac{\varepsilon}{b - a + 2C}.$$

От неравенството

$$\delta \sum_{i \in B} \Delta_i \leq \sum_{i \in B} (M_i - m_i) \Delta_i \leq \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta_i < \delta^2$$

получаваме, че  $\sum_{i \in B} \Delta_i < \delta$ .

Използвайки неравенството

$$\begin{aligned} S(h, \{x\}) - s(h, \{x\}) &= \sum_{i=1}^n (N_i - n_i) \Delta_i = \sum_{i \in A} (N_i - n_i) \Delta_i + \sum_{i \in B} (N_i - n_i) \Delta_i \\ &\leq \frac{\varepsilon(b-a)}{b-a+2C} + 2C \sum_{i \in B} \Delta_i \leq \frac{\varepsilon(b-a)}{b-a+2C} + 2C\delta \\ &< \frac{\varepsilon(b-a)}{b-a+2C} + \frac{2C\varepsilon}{b-a+2C} = \varepsilon \end{aligned}$$

и Теорема 2.3 установяваме, че  $g$  е интегрируема в интервала  $[a, b]$ . □

**Следствие 2.5** Ако функцията  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е интегрируема в интервала  $[a, b]$ , то и функцията  $|f|^\alpha$  е интегрируема в интервала  $[a, b]$  за всяко  $\alpha > 0$ .

## 2.4 Пресмятане на определени интегрални чрез интегралните суми

При пресмятане на определени интегрални за функции от класовете функции, които са интегрируеми можем да подберем една нормална редица от деления и ако интегралните суми по тази редица имат граница, то всичките интегрални суми ще клонят към тази граница при диаметър на делението клонящ към нула.

**Пример 2.6** Пресметнете интеграла  $\int_0^b x^k dx$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Функцията  $x^k : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е непрекъсната и следователно е интегрируема. Ако намерим едно деление на интервала  $[0, b]$  за което интегралните суми са сходящи, то и за всяко друго деление интегралните суми ще са сходящи към същата граница.

Да разделим интервала  $[0, b]$  на  $n$  равни части. Точките на делението  $\{x\}$  са равни на  $x_k = \frac{kb}{n}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ . За всеки частичен интервал  $[x_{k-1}, x_k]$  ще пресметнем подинтегралната функция в десния край на интервалите.

$$\sigma \left( x^k, \{x\}, \left\{ \frac{ib}{n} \right\}_{i=1}^n \right) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{ib}{n} \right)^k \cdot \frac{b}{n} = b^{k+1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n i^k}{n^{k+1}}.$$

Като използваме равенството  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n i^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$  получаваме

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma \left( x^k, \{x\}, \left\{ \frac{ib}{n} \right\}_{i=1}^n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} b^{k+1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n i^k}{n^{k+1}} = \frac{b^{k+1}}{k+1}.$$

**Пример 2.7** Пресметнете интеграла  $\int_a^b x^\mu dx$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ .

Функцията  $x^\mu : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е непрекъсната и следователно е интегрируема. Ако намерим едно деление на интервала  $[a, b]$  за което интегралните суми са сходящи, то и за всяко друго деление интегралните суми ще са сходящи към същата граница.

Да разделим интервала  $[a, b]$  на неравни части. Точките на делението  $\{x\}$  са равни на  $x_k = a \cdot \left( \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \right)^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ . От границата  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{b}{a}} = 1$  получаваме, че

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{k+1} - x_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( a \cdot \left( \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \right)^{k+1} - a \cdot \left( \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \right)^k \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot \left( \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \right)^k \left( \sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1 \right) = 0$$

и следователно делението  $\{x\}$  е нормално деление. За всеки частичен интервал  $[x_{k-1}, x_k]$  ще пресметнем подинтегралната функция в левия край на интервалите.

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma \left( x^\mu, \{x\}, \left\{ a \cdot \left( \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \right)^i \right\}_{i=0}^{n-1} \right) \\ (17) \quad &= \sum_{i=0}^{n-1} \left( a \cdot \left( \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \right)^i \right)^\mu \left( a \cdot \left( \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \right)^{i+1} - a \cdot \left( \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \right)^i \right) \\ &= a^{\mu+1} \left( \sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1 \right) \sum_{i=0}^{n-1} \left( \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \right)^{i(\mu+1)}. \end{aligned}$$

I) Ако  $\mu \neq -1$ , то получаваме

$$\sigma_n = a^{\mu+1} \left( \sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1 \right) \frac{\left( \frac{b}{a} \right)^{\mu+1} - 1}{\left( \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \right)^{\mu+1} - 1} = (b^{\mu+1} - a^{\mu+1}) \frac{\left( \sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1 \right)}{\left( \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \right)^{\mu+1} - 1}.$$

Да положим  $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ . От  $\lim_{n \rightarrow \infty} q = 1$  получаваме

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b^{\mu+1} - a^{\mu+1}) \lim_{q \rightarrow 1} \frac{q - 1}{q^{\mu+1} - 1} = \frac{b^{\mu+1} - a^{\mu+1}}{\mu + 1}$$

и следователно  $\int_a^b x^\mu dx = \frac{b^{\mu+1} - a^{\mu+1}}{\mu + 1}$ .

II) Ако  $\mu = -1$ , то от (17) получаваме  $\sigma_n = n \left( \sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1 \right)$ . След граничен преход намираме

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1 \right) = \ln b - \ln a$$

и следователно  $\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln b - \ln a$ .

Аналогично могат да бъдат пресмятани и по-сложни интеграли, като например интеграла на Поасон  $\int_0^\pi \ln(1 - 2r \cos x + r^2) dx = 2\pi \ln |r|$ .

ЗАДАЧИ:

1) Пресметнете интегралите  $\int_a^b f(x)dx$ , където

а)  $[0, 1]$ ,  $f(x) = 1 + x$ ; б)  $[0, 1]$ ,  $f(x) = x^2$ ; в)  $[0, 1]$ ,  $f(x) = 2^x$ ; г)  $[0, 1]$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$ ;

д)  $[1, 5]$ ,  $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ ; е)  $[1, 4]$ ,  $f(x) = x^2$ ; ж)  $[-1, 1]$ ,  $f(x) = 2^x$ ; з)  $[-2, 4]$ ,  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ .

2) Пресметнете интегралите  $\int_a^b f(x)dx$ , където

а)  $f(x) = \begin{cases} 1+x & x \in [0, 1] \\ x^2 & x \in [1, 2] \end{cases}$ ; б)  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in [0, 4] \\ \sqrt{x} & x \in [4, 8] \end{cases}$ ; в)  $f(x) = \begin{cases} e^x & x \in [0, 1] \\ \ln x & x \in [1, 2] \end{cases}$ .



## 2.5 Свойства на определения интеграл

**Твърдение 2.1** Ако функциите  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  са интегрируеми в интервала  $[a, b]$ , то функциите  $f \pm g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  са интегрируеми в интервала  $[a, b]$  и е изпълнено равенството

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

**Доказателство:** Да изберем произволно деление  $\{x\}$  на интервала  $[a, b]$ . За произволен избор на междинните точки е в сила равенството

$$\sum_{i=1}^n (f(\xi_i) \pm g(\xi_i))\Delta_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta_i \pm \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta_i.$$

Ако съществуват границите

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta_i \quad \text{и} \quad \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta_i,$$

то съществуват и границите  $\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (f(\xi_i) \pm g(\xi_i))\Delta_i$  и е изпълнено равенството

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (f(\xi_i) \pm g(\xi_i))\Delta_i = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta_i \pm \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta_i.$$

□

**Твърдение 2.2** Ако функцията  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е интегрируема в интервала  $[a, b]$ , то функцията  $\alpha f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е интегрируема в интервала  $[a, b]$  и е изпълнено равенството

$$\int_a^b (\alpha f(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx.$$

**Доказателство:** Да изберем произволно деление  $\{x\}$  на интервала  $[a, b]$ . За произволен избор на междинните точки е в сила равенството

$$\sum_{i=1}^n (\alpha f(\xi_i))\Delta_i = \alpha \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta_i.$$

Ако съществува границата

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta_i,$$

то съществува и границата  $\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\alpha f(\xi_i))\Delta_i$  и е изпълнено равенството

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\alpha f(\xi_i))\Delta_i = \alpha \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta_i.$$

□

**Следствие 2.6** Ако функциите  $f_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  са интегрируеми в интервала  $[a, b]$ , то функцията  $\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е интегрируема в интервала  $[a, b]$  и е изпълнено равенството

$$\int_a^b \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x) dx = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_a^b f_i(x) dx.$$

**Твърдение 2.3** Ако функциите  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  са интегрируеми в интервала  $[a, b]$ , то функцията  $fg : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е интегрируема в интервала  $[a, b]$ .

**Доказателство:** Според Твърдение 2.1 функциите  $f \pm g$  са интегрируеми в интервала  $[a, b]$ . Съгласно Теорема 2.8 функциите  $(f \pm g)^2$  са интегрируеми в интервала  $[a, b]$ , където сме избрали  $\varphi(t) = t^2$ . От равенството

$$f(x)g(x) = \frac{1}{4} \left( (f(x) + g(x))^2 - (f(x) - g(x))^2 \right)$$

и Твърдение 2.2 следва интегрируемостта на  $fg$ . □

**Твърдение 2.4** Ако функцията  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  са интегрируеми в интервала  $[a, b]$ , то тя е интегрируема и в интервала  $[c, d] \subset [a, b]$ .

**Доказателство:** Избираме произволно  $\varepsilon > 0$ . Съществува деление  $\{x\}$  на интервала  $[a, b]$ , така че  $S(f, \{x\}, [a, b]) - s(f, \{x\}, [a, b]) < \varepsilon$ . Разглеждаме делението  $\{y\}$ , което е получено от  $\{x\}$  с добавянето на точките  $c$  и  $d$ . Тогава ако означим с  $\{z\}$  делението на интервала  $[c, d]$ , което е получено от  $\{y\}$  чрез премахването на точките  $y_i \notin [c, d]$ , получаваме неравенствата

$$\begin{aligned} S(f, \{z\}, [c, d]) - s(f, \{z\}, [c, d]) &\leq S(f, \{y\}, [a, b]) - s(f, \{y\}, [a, b]) \\ &\leq S(f, \{x\}, [a, b]) - s(f, \{x\}, [a, b]) < \varepsilon \end{aligned}$$

и съгласно Теорема 2.3 функцията  $f$  е интегрируема в интервала  $[c, d]$ . □

**Забележка** Ще приемем за всяка функция, която е интегрируема в интервала  $[a, b]$  са в сила равенствата  $\int_a^a f(x) dx = 0$  и  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$  за  $a < b$ .

**Твърдение 2.5** Ако функцията  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е интегрируема в интервалите  $[a, c]$  и  $[c, b]$ , то тя е интегрируема в интервала  $[a, b]$  и е в сила равенството

$$(18) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

**Доказателство:** Ако  $a = b$ , то според уговорката в горната Забележка твърдението е вярно.

Да приемем, че  $a < c < b$ . Избираме произволно  $\varepsilon > 0$ . Съществуват деление  $\{x\}$  на интервала  $[a, c]$  и деление  $\{y\}$  на интервала  $[c, b]$ , такива че  $S(f, \{x\}, [a, c]) - s(f, \{x\}, [a, c]) < \frac{\varepsilon}{2}$  и  $S(f, \{y\}, [c, b]) - s(f, \{y\}, [c, b]) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Да разгледаме делението  $\{z\}$  на интервала  $[a, b]$ , което е обединението на деленията  $\{x\}$  и  $\{y\}$ . Тогава

$$\begin{aligned} S - s &= S(f, \{z\}, [a, b]) - s(f, \{z\}, [a, b]) \\ &= S(f, \{x\}, [a, c]) - s(f, \{x\}, [a, c]) + S(f, \{y\}, [c, b]) - s(f, \{y\}, [c, b]) < \varepsilon \end{aligned}$$

и следователно функцията  $f$  е интегрируема в интервала  $[a, b]$ .

Ще докажем верността на формула (18). Нека  $\{x\}$  е произволно деление на интервала  $[a, b]$ , което съдържа точката  $c$ . От равенството

$$\sigma(f, \{x\}, \{\xi\}) = \sum_{\xi \in [a, c]} f(\xi_i) \Delta_i + \sum_{\xi \in [c, b]} f(\xi_i) \Delta_i,$$

което е изпълнено за всяко деление  $\{x\}$ , получаваме

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{d \rightarrow 0} \sigma(f, \{\xi\}, [a, b]) \\ &= \lim_{d \rightarrow 0} \sigma(f, \{\xi\}, [a, c]) + \lim_{d \rightarrow 0} \sigma(f, \{\xi\}, [c, b]) = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Нека  $c \notin [a, b]$ . Тогава е изпълнено едно от двете условия: или  $c < a < b$  или  $a < b < c$ . Ще разгледаме случая  $c < a < b$ . От условието, че  $f$  е интегрируема в интервала  $[c, b]$ , включването  $[a, b] \subset [c, b]$  и Твърдение 2.4 следва, че  $f$  е интегрируема в  $[a, b]$ . От доказаното по-горе получаваме равенството

$$\int_c^b f(x) dx = \int_c^a f(x) dx + \int_a^b f(x) dx.$$

Съгласно последната забележка в сила са равенствата

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^b f(x) dx - \int_c^a f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

□

**Пример 2.8** Пресметнете  $\int_a^b x^k dx$ , където  $k \in \mathbb{N}$ .

Според Пример 2.6 имаме равенствата  $\int_0^a x^k dx = \frac{a^{k+1}}{k+1}$  и  $\int_0^b x^k dx = \frac{b^{k+1}}{k+1}$ . От Твърдение 2.5 следва

$$\int_a^b x^k dx = \int_0^b x^k dx - \int_0^a x^k dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.$$

**Твърдение 2.6** Ако функцията  $f : [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$  е интегруема в интервала  $[a, b]$ , то в сила е неравенството

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

**Доказателство:** За всяко деление  $\{x\}$  на интервала  $[a, b]$  и всеки избор на междинните стойности  $\{\xi\}$  е в сила неравенството  $\sigma(f, \{x\}, \{\xi\}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta_i \geq 0$ . Следователно

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d \rightarrow 0} \sigma(f, \{x\}, \{\xi\}) = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta_i \geq 0.$$

□

**Следствие 2.7** Ако функциите  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  са интегруеми в интервала  $[a, b]$  и удовлетворяват неравенството  $f(x) \geq g(x)$  за всяко  $x \in [a, b]$ , то в сила е неравенството

$$(19) \quad \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

**Доказателство:** Разглеждаме функцията  $F(x) = f(x) - g(x)$ . От  $F(x) \geq 0$ , за всяко  $x \in [a, b]$ , Твърдение 2.1 и Твърдение 2.6 получаваме неравенството

$$\int_a^b F(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx \geq 0$$

и според (2.1) е в сила  $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx \geq 0$ . □

**Пример 2.9** Определете, кой от интегралите  $\int_0^1 \sqrt{x}dx$  или  $\int_0^1 x^3dx$  е по-голям.

От неравенството  $\sqrt{x} \geq x^3$  за всяко  $x \in [0, 1]$  и Следствие 2.7 получаваме

$$\int_0^1 \sqrt{x}dx \geq \int_0^1 x^3dx.$$

**Пример 2.10** Оценете отгоре и отдолу интеграла  $\int_1^3 \sqrt{3+x^3}dx$ .

За всяко  $x \in [1, 3]$  са изпълнени неравенствата  $2 \leq \sqrt{3+x^3} \leq \sqrt{30}$ . Прилагайки Следствие 2.7, получаваме

$$4 = \int_1^3 2dx \leq \int_1^3 \sqrt{3+x^3}dx \leq \int_1^3 \sqrt{30}dx = 2\sqrt{30}.$$

**Твърдение 2.7** Ако функцията  $f : [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$  е непрекъсната и съществува  $x_0 \in [a, b]$ , така че  $f(x_0) = \alpha > 0$ , то в сила е неравенството

$$\int_a^b f(x)dx = \beta > 0.$$

**Доказателство:** От непрекъснатостта на  $f$  и теоремата за запазване на знака следва, че съществува  $\delta > 0$ , така че за всяко  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  е изпълнено неравенството  $f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2} = \frac{\alpha}{2}$ . Нека да изберем  $c < d$ , така че  $[c, d] \subset ([a, b] \cup (x_0 - \delta, x_0 + \delta))$  и да положим  $\beta = \frac{\alpha(d-c)}{2} > 0$ . От неравенствата

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_c^d f(x)dx \geq \int_c^d \frac{\alpha}{2}dx = \frac{\alpha(d-c)}{2} = \beta > 0$$

следва доказателството на твърдението.  $\square$

**Твърдение 2.8** Ако функцията  $f : [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$  е интегрируема в интервала  $[a, b]$ , то и функцията  $|f|$  е интегрируема в интервала  $[a, b]$  и е в сила неравенството

$$(20) \quad \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

**Доказателство:** Според Теорема 2.8, приложена за функцията  $\varphi(t) = |t|$  следва, че  $|f|$  е интегрируема в интервала  $[a, b]$ . От неравенствата  $f(x) \leq |f(x)|$  и  $-f(x) \leq |f(x)|$  следва (20).  $\square$

**Задачи:**

1) Пресметнете интегралите:

а)  $\int_0^1 (x^2 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^4}) dx$ ; б)  $\int_{-1}^1 (x^{\sqrt{2}} + x^{-\pi} + \frac{1}{x}) dx$ ;

в)  $\int_0^1 \frac{x^3 - x^4 + \sqrt[3]{x}}{x^2} dx$ ; г)  $\int_2^4 \frac{x^a + \sqrt[3]{x}}{x^2} dx$ .

2) Кой от интегралите е по-голям:

а)  $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx$  или  $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$ ; б)  $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$  или  $\int_0^{\pi/2} \frac{2x}{\pi} dx$ ;

в)  $\int_0^1 e^{-x} dx$  или  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ ; г)  $\int_1^2 x^2 dx$  или  $\int_1^2 x^3 dx$ ;

д)  $\int_0^2 \left(x - \frac{x^2}{2}\right) dx$  или  $\int_0^2 \ln(1+x) dx$ ; е)  $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x dx$  или  $\int_0^{\pi/4} \left(x + \frac{x^3}{3}\right) dx$ .

## 2.6 Определеният интеграл като функция на горната си граница

**Теорема 2.9** (Първа формула за средните стойности) Нека функциите  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  са интегрируеми в интервала  $[a, b]$  и  $g$  е неотрицателна (неположителна). Да означим  $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$  и  $m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$ . Съществува  $\mu \in [m, M]$ , така че

$$(21) \quad \int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx.$$

**Доказателство:** Ще докажем случая, когато  $g$  е неотрицателна функция. За всяко  $x \in [a, b]$  са в сила неравенствата

$$m \leq f(x) \leq M.$$

От  $g(x) \geq 0$  за всяко  $x \in [a, b]$  следват неравенствата

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x).$$

От Следствие 2.7 получаваме неравенствата

$$(22) \quad m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx.$$

I) Ако  $\int_a^b g(x)dx = 0$ , то  $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$  и (21) е в сила за всяко  $\mu$ .

II) Ако  $\int_a^b g(x)dx > 0$ , то можем да запишем неравенствата (22) във вида

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M.$$

Следователно съществува  $\mu \in [m, M]$ , така че  $\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = \mu \in [m, M]$ , т.е. формула

(21) е изпълнена. □

**Следствие 2.8** (Първа формула за средните стойности) Нека функцията  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е непрекъсната, а  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е интегрируема в интервала  $[a, b]$  и неотрицателна (неположителна). Съществува  $\xi \in [a, b]$ , така че

$$(23) \quad \int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

**Доказателство:** От непрекъснатостта на  $f$  следва, че тя е интегрируема в  $[a, b]$  и се удовлетворяват условията на Теорема 2.9. Следователно съществува  $\mu \in [m, M]$ , така че  $\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$ . От непрекъснатостта на  $f$  следва, че съществува  $\xi \in [a, b]$ , така че  $\mu = f(\xi)$ , т.е. формула (23) е изпълнена.  $\square$

**Следствие 2.9** (формула за средните стойности) Нека функцията  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е интегрируема в интервала  $[a, b]$ . Да означим  $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$  и  $m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$ . Съществува  $\mu \in [m, M]$ , така че

$$(24) \quad \int_a^b f(x)dx = \mu(b-a).$$

**Доказателство:** От Теорема 2.9 при  $g(x) \equiv 1$  следва равенството

$$\int_a^b f(x)dx = \mu \int_a^b dx = \mu(b-a).$$

**Следствие 2.10** (формула за средните стойности) Нека функцията  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е непрекъсната. Съществува  $\xi \in [a, b]$ , така че

$$(25) \quad \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

**Доказателство:** От непрекъснатостта на  $f$  следва, че за всяко  $\mu \in [m, M]$  съществува  $\xi \in [a, b]$  и от Следствие 2.9 следва (25).  $\square$

**Пример 2.11** Оценете отгоре интеграла  $\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2}dx$ .

Съгласно Следствие 2.8 съществува  $\xi \in [0, 1]$ , така че

$$\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2}dx = \frac{1}{1+\xi^2} \int_0^1 x^4dx = \frac{1}{1+\xi^2} \frac{1^5 - 0^5}{5} = \frac{1}{5(1+\xi^2)} < \frac{1}{5} = 0.2.$$

**Пример 2.12** Пресметнете  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$ .

Съгласно Следствие 2.8 съществува  $\xi \in [0, 1]$ , така че

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = \frac{1}{1+\xi} \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{(n+1)(1+\xi)}.$$

От неравенствата

$$\frac{1}{2(1+n)} \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \leq \frac{1}{1+n}$$

след граничен преход при  $n \rightarrow \infty$  получаваме

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0.$$

Ако функцията  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е интегрируема в интервала  $[a, b]$ , то тя е интегрируема във всеки един интервал  $[a, x]$ , където  $x \in [a, b]$ .

Дефинираме функцията

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

зависеща от  $x$ .

**Твърдение 2.9** Ако функцията  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е интегрируема в интервала  $[a, b]$ , то функцията  $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$  е непрекъсната в интервала  $[a, b]$ .

**Доказателство:** Нека  $x \in [a, b]$  е произволно. Разглеждаме нараствания на аргумента  $\Delta x$ , такива че  $x + \Delta x \in [a, b]$ . Да положим  $m = \inf_{a \leq x \leq b} \{f(x)\}$ ,  $M = \sup_{a \leq x \leq b} \{f(x)\}$  и  $\alpha = \max\{|m|, |M|\}$ . Според Следствие 2.9 съществува  $\mu \in [m, M]$ , така че

$$|\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)| = \left| \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| = \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt \right| = |\mu \Delta x| \leq \alpha |\Delta x|.$$

Следователно  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)) = 0$  и  $\Phi$  е непрекъсната в точката  $x$ .  $\square$

**Твърдение 2.10** Ако функцията  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , интегрируема в интервала  $[a, b]$  е и непрекъсната в точката  $x_0 \in [a, b]$ , то функцията  $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$  има производна в точката  $x_0$ , която е равна на  $\Phi'(x_0) = f(x_0)$ .

**Доказателство:** Нека  $x_0 \in [a, b]$  е произволно. Разглеждаме нараствания на аргумента  $\Delta x$ , такива че  $x_0 + \Delta x \in [a, b]$ . Да положим  $m = m(\Delta x) = \inf_{x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta} \{f(x)\}$  и  $M = M(\Delta x) = \sup_{x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta} \{f(x)\}$ . Според Следствие 2.9 съществува  $\mu(\Delta x) \in [m, M]$ , така че

$$\frac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} = \frac{\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t) dt}{\Delta x} = \mu.$$

От непрекъснатостта на  $f$  в точката  $x_0$  следва  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$ . Тогава  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mu(\Delta x) = \mu(0) = f(x_0)$ . Следователно

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t) dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mu(\Delta x) = f(x_0).$$

$\square$



**Следствие 2.11** Ако функцията  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е непрекъсната в интервала  $[a, b]$ , то функцията  $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$  е диференцируема в интервала  $[a, b]$  и  $\Phi'(x) = f(x)$ .

**Следствие 2.12** Ако функцията  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е непрекъсната в интервала  $[a, b]$ , то тя има примитивна. Една от примитивните на  $f$  е  $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ .

**Забележка:** Всички твърдения за  $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$  се доказват аналогично за функцията  $\Psi(x) = \int_x^b f(t)dt = - \int_b^x f(t)dt$ .

ЗАДАЧИ:

1) Намерете производните:

а)  $\left(\int_x^b f(t)dt\right)'$ ; б)  $\left(\int_a^{2x} f(t)dt\right)'$ ; в)  $\left(\int_x^{2x} f(t)dt\right)'$ .

## 2.7 Формула на Лайбниц–Нютон

**Теорема 2.10** Нека  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е непрекъсната функция в интервала  $[a, b]$  и  $F$  е произволна примитивна на  $f$ . Тогава в сила е формулата

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

**Доказателство:** Съгласно Следствие 2.12 имаме, че  $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$  е примитивна на функцията  $f$ . Лесно се съобразява верността на тъждеството

$$(26) \quad \int_a^b f(x)dx = \Phi(b) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

От Твърдение 1.1 следва, че ако  $F$  е примитивна на  $f$ , то съществува константа  $C$ , така че  $\Phi(x) = F(x) + C$  за всяко  $x \in [a, b]$ . Заместваем  $\Phi$  в тъждеството (26) и получаваме

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a) = F(b) - C - F(a) + C = F(b) - F(a).$$

□

Теорема 2.10 предоставя лесен и ефективен метод за пресмятане на широк клас от определени интеграли. Често използваме запис

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

**Пример 2.13** Пресметнете  $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$ .

Една от примитивните на функцията  $\frac{1}{1+x^2}$  е функцията  $F(x) = \operatorname{arctg} x$ . Според Теорема 2.10 можем да запишем равенствата

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_1^{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$$

**Теорема 2.11** Нека  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е интегрируема в интервала  $[a, b]$  и  $F$  непрекъсната функция, която е примитивна на  $f$ . Тогава в сила е формулата

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

**Доказателство:** Да разгледаме произволно деление  $\{x\}$  на интервала  $[a, b]$ . Прилагаме теоремата за крайните нараствания в тъждеството  $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1}))$  и получаваме

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n F'(\xi_i) (F(x_i) - F(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (F(x_i) - F(x_{i-1})) = \sigma(f, \{x\}, \{\xi\}).$$

След граничен преход при  $d \rightarrow 0$  в последното равенство, като използваме условието, че  $f$  е интегрируема получаваме

$$F(b) - F(a) = \lim_{d \rightarrow 0} \sigma(f, \{x\}, \{\xi\}) = \int_a^b f(x)dx.$$

□

**Твърдение 2.11** Ако  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е диференцируема функция и  $F'$  е интегрируема в интервала  $[a, b]$ , то в сила е формулата

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(x)dx$$

Формулата  $F(x) - F(a) = \int_a^x F'(x)dx$  е в сила за всяко  $x \in [a, b]$ .

□

**ЗАДАЧИ:**

1) Пресметнете интегралите:

а)  $\int_a^b x^\mu dx$ ; б)  $\int_a^b \sin x dx$ ; в)  $\int_a^b \cos x dx$ ; г)  $\int_a^b e^x dx$ .

2) Пресметнете интегралите:

а)  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m \neq n$ ; б)  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m \neq n$ ;

в)  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m \neq n$ ; г)  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(mx) dx$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ;

3) Пресметнете интегралите:

а)  $\int_0^1 \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx$ ; б)  $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$ .

## 2.8 Приложение на формулите за средните стойности и формулата на Лайбниц–Нютон

**Пример 2.14** Оценете отгоре интеграла  $\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2} dx$ .

Съгласно Следствие 2.8 съществува  $\xi \in [0, 1]$ , така че

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2} dx = \sin \xi \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \sin(\xi) \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \sin \xi < \frac{\pi}{4} \sin 1 \approx 0,64.$$

Ако сменим ролите на двете функции ще получим по-добра оценка

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2} dx = \frac{1}{1+\xi^2} \int_0^1 \sin x dx = \frac{1}{1+\xi^2} \cos x \Big|_0^1 = \frac{1}{1+\xi^2} (1 - \cos 1) < 1 - \cos 1 \approx 0,46.$$

**Пример 2.15** Намерете границата  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}$ .

От равенството  $\int_0^0 \cos t^2 dt = 0$  следва, че имаме неопределеност от вида  $\left[ \frac{0}{0} \right]$  и можем да приложим Теоремата на Лопитал:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left( \int_0^x \cos t^2 dt \right)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x^2}{1} = 1.$$

**Пример 2.16** Намерете локалните екстремуми на функцията  $F(x) = \int_0^x \frac{\sin x}{x} dx$ .

От непрекъснатостта на  $\frac{\sin x}{x}$  за всяко  $x \in (0, +\infty)$  следва, че можем да приложим Следствие 2.11. Пресмятаме  $F'(x) = \frac{\sin x}{x}$ . Намираме критичните точки на  $F$ ,  $x_n = n\pi$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , които са решение на уравнението  $\frac{\sin x}{x} = 0$ .

Пресмятаме  $F''(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$ . От

$$F''(x_n) = \frac{n\pi \cos(n\pi) - \sin(n\pi)}{(n\pi)^2} = \frac{(-1)^n}{n\pi}$$

следва, че  $F$  има локален максимум в точките  $x_{2n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  и има локален минимум в точките  $x_{2n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Теорема 2.12** (втора формула за средните стойности) Нека функцията  $f : [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$  е монотонна и  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е интегрируема.

1) Ако  $f$  е намаляваща, то съществува  $\xi \in [a, b]$ , така че е в сила равенството

$$(27) \quad \int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^\xi g(x)dx;$$

2) Ако  $f$  е растяща, то съществува  $\xi \in [a, b]$ , така че е в сила равенството

$$(28) \quad \int_a^b f(x)g(x)dx = f(b) \int_\xi^b g(x)dx.$$

**Доказателство:** 1) Да разгледаме деление  $\{x\}$  на интервала  $[a, b]$  и да представим интеграла във вида

$$(29) \quad I = \int_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i)g(x)dx + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x) - f(x_i))g(x)dx.$$

Да означим

$$\omega_i = \sup\{|f(x) - f(x_i)| : x \in [x_i, x_{i+1}]\}$$

и

$$L = \sup\{|g(x)| : x \in [a, b]\}.$$

От неравенствата

$$s_2 = \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x) - f(x_i))g(x)dx \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x) - f(x_i)||g(x)|dx \leq L \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i$$

и интегрируемостта на  $f$  следва, че  $s_2 \rightarrow 0$  при диаметър на делението  $\{x\}$ , клонящ към нула и тогава от представянето (29) получаваме

$$(30) \quad I = \int_a^b f(x)g(x)dx = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i)g(x)dx.$$

Да означим  $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ ,

$$M = \sup\{G(x) : x \in [a, b]\}$$

и

$$m = \inf\{G(x) : x \in [a, b]\}.$$

След регрупиране на събираемите и отчитане, че  $G(x_0) = G(a) = 0$  получаваме

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i)g(x)dx &= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) (G(x_{i+1}) - G(x_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} G(x_i) (f(x_{i-1}) - f(x_i)) + G(b)f(x_{n-1}). \end{aligned}$$

От последното равенство и условието, че  $f$  е нерастаща следва  $f(x_{i-1}) - f(x_i) \geq 0$ . Следователно са изпълнени неравенствата

$$(31) \quad mf(a) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i)g(x)dx \leq Mf(a).$$

От (30) и (31) при  $f(a) > 0$  следват неравенствата

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{f(a)} \leq M.$$

От непрекъснатостта на  $G$  следва, че съществува  $\xi \in [a, b]$ , така че

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{f(a)} = G(\xi) = \int_a^\xi g(t)dt.$$

Ако  $f(a) = 0$ , то от неравенствата (31) следва, че  $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$  и формула (27) е изпълнена за всяко  $\xi \in [a, b]$ .

Доказателството на 2) се провежда е аналогично.  $\square$

**Теорема 2.13** (втора формула за средните стойности) Нека функцията  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е монотонна и  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е интегрируема. Тогава съществува  $\xi \in [a, b]$ , така че е в сила равенството

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^\xi g(x)dx + f(b) \int_\xi^b g(x)dx.$$

**Доказателство:** Да предположим, че  $f$  е монотонно намаляваща. Дефинираме функцията  $h(x) = f(x) - f(b)$ , която удовлетворява условията, наложени на  $f$  в Теорема 2.12. След заместване в (27) на  $f$  с  $h$  получаваме

$$\int_a^b (f(x) - f(b))dx = (f(a) - f(b)) \int_a^\xi g(x)dx$$

и следователно

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= f(a) \int_a^\xi g(x)dx - f(b) \int_a^\xi g(x)dx + f(b) \int_a^b f(x)dx \\ &= f(a) \int_a^\xi g(x)dx + f(b) \int_\xi^b g(x)dx.\end{aligned}$$

Ако  $f$  е монотонно растяща, полагаме  $h(x) = f(b) - f(x)$  и заместваме в (28).  $\square$

ЗАДАЧИ:

1) Оценете интегралите:

$$\begin{aligned}\text{а) } \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin x}{x} dx; \quad \text{б) } \int_0^2 \frac{x^2 + 5}{x^2 + 2} dx; \quad \text{в) } \int_1^e \frac{\ln x}{1 + x^2} dx; \\ \text{г) } \int_0^1 \frac{\arctg x}{\sqrt{1 + x^4}} dx; \quad \text{д) } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + \frac{\cos x}{2}}; \quad \text{е) } \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x + 100} dx.\end{aligned}$$

2) Докажете неравенствата:

$$\text{а) } 0 < \int_0^1 \frac{x^7 dx}{\sqrt[3]{1 + x^8}} < \frac{1}{8}; \quad \text{б) } 1 < \int_0^1 e^{x^2} dx < e.$$

3) Определете знаците на интегралите:

$$\text{а) } \int_0^{2\pi} x \sin x dx; \quad \text{б) } \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx; \quad \text{в) } \int_{-2}^2 x^3 2^x dx; \quad \text{г) } \int_{1/2}^1 x^2 \ln x dx.$$

4) Пресметнете:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{2 + x} dx; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos x}{(1 + x)^n} dx.$$

5) Намерете границите:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \arctg^2 t dt}{\sqrt{1 + x^2}}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( \int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}.$$

6) Намерете локалните екстремуми на функцията:

$$\text{а) } F(x) = \int_0^x (t - 1)(t - 2)^2 dt; \quad \text{б) } F(x) = \int_0^x (t + 2)(e^{t^2} - 1) dt;$$

$$\text{в) } F(x) = \int_1^x e^{-\frac{t^2}{2}} (1 - t^2) dt; \quad \text{г) } F(x) = \int_0^x \frac{t^2 - 5t + 4}{2 + e^t} dt.$$

## 2.9 Интегриране по части

**Теорема 2.14** Нека функциите  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  са непрекъснати заедно с производните си. Тогава

$$(32) \quad \int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx.$$

**Доказателство:** От равенството  $(f \cdot g)' = f'g + fg'$  следва, че  $fg$  е примитивна на  $f'g + fg'$ . Тогава от равенството

$$\int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) dx = f(x)g(x)\Big|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

следва верността на (32). □

**Пример 2.17** Пресметнете  $\int_0^1 xe^x dx$ .

След интегриране по части получаваме равенството

$$\int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 xde^x = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x\Big|_0^1 = e - e + 1 = 1.$$

**Пример 2.18** Пресметнете  $\int_0^{\pi/2} \sin^m x dx$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .

След интегриране по части получаваме равенството

$$\begin{aligned} J_m &= \int_0^{\pi/2} \sin^m x dx = - \int_0^{\pi/2} \sin^{m-1} x d(\cos x) = - \sin^{m-1} x \cos x \Big|_0^{\pi/2} \\ &\quad + (m-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x \cos^2 x dx = (m-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x (1 - \sin^2 x) dx \\ &= (m-1) \left( \int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x dx - \int_0^{\pi/2} \sin^m x dx \right) = (m-1)J_{m-2} + (m-1)J_m \end{aligned}$$

и следователно е в сила рекурентната формула  $J_m = \frac{m-1}{m} J_{m-2}$ . От рекурентната връзка получаваме равенствата

$$J_{2n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

и

$$J_{2n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

ЗАДАЧИ:

1) Пресметнете интегралите:

а)  $\int_0^\pi x \sin x dx$ ; б)  $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x dx$ ; в)  $\int_1^e x \ln x dx$ ; г)  $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx$ .

2) Докажете тъждествата:

а)  $\int_0^{\pi/2} \cos^m x \cos(m+2)x dx = 0$ ; б)  $\int_0^{\pi/2} \cos^m x \sin(m+2)x dx = \frac{1}{m+1}$ ;

в)  $\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos(m+2)x dx = -\frac{\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)}{m+1}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ;

г)  $\int_0^{\pi/2} \sin^m x \sin(m+2)x dx = -\frac{\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right)}{m+1}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .

3) Намерете рекурентна формула и пресметнете интегралите:

а)  $\int_0^{\pi/2} x \cos^n x \sin(nx) dx$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ; б)  $\int_0^{\pi/2} x \cos^n x \cos(nx) dx$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;

в)  $\int_0^1 x^m \ln^n x dx$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ ; г)  $\int_0^1 (1-x)^m x^n dx$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ .

## 2.10 Интегриране чрез смяна на променливите

**Теорема 2.15** Нека  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е непрекъсната функция,  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  има непрекъсната производна,  $\varphi(\alpha) = a$  и  $\varphi(\beta) = b$ . Тогава

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

**Доказателство:** Нека  $F$  е примитивна на функцията  $f$ . Тогава функцията  $\Phi(t) = F(\varphi(t))$  е примитивна на функцията  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$  и можем да запишем равенствата

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

□

**Забележка:** Ще отбележим, че при пресмятането на определен интеграл с помощта на субституция не е необходимо да връщаме полагането, така както се прави при неопределения интеграл.



**Пример 2.19** Пресметнете  $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$ .

Полагаме  $x = a \sin t$ . Тогава  $dx = a \cos t dt$ ,  $a \sin 0 = 0$  и  $a \sin(\pi/2) = a$ . Заместваме и получаваме

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \left( t + \frac{\sin(2t)}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

**Пример 2.20** Пресметнете  $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ .

Полагаме  $x = \varphi(\pi - t)$ . Следователно  $dx = -dt$ ,  $\varphi(0) = \pi$  и  $\varphi(\pi) = 0$ . Заместваме и получаваме

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = - \int_\pi^0 \frac{(\pi - t) \sin(\pi - t)}{1 + \cos^2(\pi - t)} dt = \int_0^\pi \frac{(\pi - t) \sin t}{1 + \cos^2 t} dt \\ &= \pi \int_0^\pi \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt - \int_0^\pi \frac{t \sin t}{1 + \cos^2 t} dt = \pi \int_0^\pi \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt - I. \end{aligned}$$

Решаваме уравнението спрямо  $I$  и намираме

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt = -\frac{\pi}{2} \operatorname{arctg}(\cos t) \Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{4}.$$

**Пример 2.21** Пресметнете  $\int_0^a (a^2 - x^2)^m dx$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .

Полагаме  $x = a \cos t$ . Тогава  $dx = -a \sin t dt$ ,  $a \cos 0 = a$  и  $a \cos(\pi/2) = 0$ . Заместваме и намираме.

$$I_m = \int_0^a (a^2 - x^2)^m dx = -a^{2m+1} \int_{\pi/2}^0 \sin^{2m+1} x dx = a^{2m+1} \int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} x dx.$$

Прилагаме резултата от Пример 2.18 и получаваме:

$$I_m = \int_0^a (a^2 - x^2)^m dx = a^{2m+1} \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}.$$

Задачи:

1) Пресметнете интегралите:

а)  $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4 - x^2} dx$ ; б)  $\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^4} dx$ ; в)  $\int_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} dx$ ; г)  $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1 + x^2)^3}}$ ;

$$\text{д) } \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{6 - 5 \sin x - \sin^2 x} dx; \text{ е) } \int_1^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x}; \text{ ж) } \int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1 + \ln x}}; \text{ з) } \int_2^3 \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3 + \sqrt[3]{(x-2)^2}} dx.$$

2) Пресметнете интегралите:

$$\text{а) } \int_{-4}^{-5} e^{(x+5)^2} dx; \text{ б) } \int_0^{\pi} \frac{\sin(2kx)}{\sin x} dx;$$

### 3 Несобствени интеграли

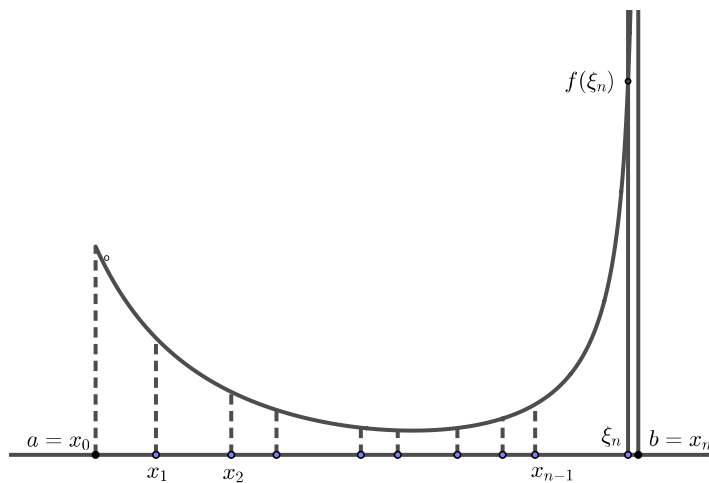
Нека  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  и  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \infty$ . Да разгледаме деление  $\{x\}$  на интервала  $[a, b]$ , такова че  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots x_{n-1} < x_n = b$ . Тогава интегралната сума  $\sigma$  на  $f$  за делението  $\{x\}$  е равна на

$$\sigma(f, \{x\}, \{\xi\}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i = \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i) \Delta_i + f(\xi_n) \Delta_n.$$

Независимо от стойностите на  $\sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i) \Delta_i$  и  $\Delta_n$  за всяко  $M$  можем да изберем  $\xi_n \in [x_{n-1}, x_n]$ , такова че  $f(\xi_n) > \frac{M + |\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i|}{\Delta_n}$  (Фигура 9). Следователно

$$\begin{aligned} |\sigma(f, \{x\}, \{\xi\})| &= \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i \right| \geq |f(\xi_n) \Delta_n - \left| \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i) \Delta_i \right|| \\ &> \frac{M + \left| \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i) \Delta_i \right|}{\Delta_n} \cdot \Delta_n - \left| \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i) \Delta_i \right| = M. \end{aligned}$$

Следователно каквото и деление  $\{x\}$  да избираме за всяко  $M$  съществува избор на междинните точки  $\{\xi\}$ , така че то  $|\sigma(f, \{x\}, \{\xi\})| > M$  и интегралните суми нямат граница.



Фигура 9:

Нека  $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Да разгледаме деление  $\{x\}$  на интервала  $[a, +\infty)$ , такова че  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots x_{n-1} < x_n = +\infty$ . Тогава интегралната сума  $\sigma$  на  $f$  за делението  $\{x\}$  е равна на

$$\sigma(f, \{x\}, \{\xi\}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i = \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i) \Delta_i + f(\xi_n) \Delta_n.$$

Независимо от стойността на  $\sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)\Delta_i$  и избора на  $\xi_n \in [x_{n-1}, \infty)$ , такава че  $f(\xi_n) \neq 0$ , от  $\Delta_n = +\infty$  получаваме  $|\sigma(f, \{x\}, \{\xi\})| = +\infty$ . Следователно каквото и деление  $\{x\}$  да избираме, то  $|\sigma(f, \{x\}, \{\xi\})| = \infty$  и интегралните суми нямат граница. Разбира се в този случай не можем да говорим и за сходимост на диаметъра на деленията.

### 3.1 Несобствени интеграли с безкрайни граници

**Определение 3.1** Нека функцията  $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  е интегрируема във всеки интервал  $[a, A]$ . Ако съществува границата  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx$  казваме, че несобственият интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  от първи род е сходящ и има стойност

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx.$$

Ако границата  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx$  не съществува или е безкрайност казваме, че несобственият интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  от първи род е разходящ.

**Пример 3.1** Пресметнете  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ .

От равенството  $\int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_0^A = \arctg A - \arctg 0 = \arctg A$  получаваме

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \arctg A = \frac{\pi}{2}.$$

**Пример 3.2** Изследвайте за сходимост интеграла

$$(33) \quad \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$$

за  $a > 0$ .

От равенството

$$\int_a^A \frac{dx}{x^\lambda} = \begin{cases} \ln |x| \Big|_a^A = \ln A - \ln a, & \lambda = 1 \\ \frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda} \Big|_a^A = \frac{A^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \frac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda}, & \lambda \neq 1 \end{cases}$$

получаваме при  $\lambda = 1$

$$(34) \quad \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln A - \ln a = +\infty$$

и при  $\lambda \neq 1$

$$(35) \quad \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{A^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \frac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda} = \begin{cases} -\frac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda}, & \lambda > 1 \\ +\infty, & \lambda < 1. \end{cases}$$

От (34) и (35) следва, че несобственият интеграл (33) е сходящ за  $\lambda > 1$  и е разходящ за  $\lambda \leq 1$ .

**Пример 3.3** Изследвайте за сходимост  $\int_0^{+\infty} \sin x dx$ .

Функцията  $F(x) = \cos x$  е примитивна за подинтегралната функция. От несъществуването на границата  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \sin A$  следва, че несобственият интеграл  $\int_0^{+\infty} \sin x dx$  е разходящ.

**Определение 3.2** Нека функцията  $f : (-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$  е интегрируема във всеки интервал  $[A, a]$ . Ако съществува границата  $\lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^a f(x) dx$ , казваме че несобственият интеграл  $\int_{-\infty}^a f(x) dx$  от първи род е сходящ и има стойност

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^a f(x) dx.$$

**Пример 3.4** Пресметнете  $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}$ .

От равенството  $\int_A^0 \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_A^0 = \arctg 0 - \arctg A = -\arctg A$  получаваме

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^0 \frac{dx}{1+x^2} = -\lim_{A \rightarrow -\infty} \arctg A = \frac{\pi}{2}.$$

**Определение 3.3** Нека функцията  $f : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  е интегрируема във всеки интервал  $[A, B]$ . Ако границата  $\lim_{\substack{A \rightarrow -\infty \\ B \rightarrow +\infty}} \int_A^B f(x) dx$  съществува, където  $A$  и  $B$  клонят съ-

ответно към  $-\infty$  и  $+\infty$  независимо едно от друго, казваме че несобственият интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  от първи род е сходящ и има стойност

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{A \rightarrow -\infty \\ B \rightarrow +\infty}} \int_A^B f(x) dx.$$

**Твърдение 3.1** *Определение 3.3 е еквивалентно на съществуването на  $a \in \mathbb{R}$ , така че интегралите  $\int_{-\infty}^a f(x)dx$  и  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  да бъдат сходящи и е изпълнено равенството*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

**Пример 3.5** *Пресметнете  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ .*

От Твърдение 3.1, Пример 3.1 и Пример 3.4 получаваме

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Разгледаните примери показват, че при пресмятането на несобствен интеграл от първи род извършваме последователно следните операции – намиране на една примитивна, прилагане на формулата на Лайбниц–Нютон и извършване на граничен преход. За тези три действия можем да използваме записа

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x) \Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a),$$

където  $F$  е примитивна на  $f$ ,  $F(+\infty) = \lim_{A \rightarrow +\infty} F(A)$  и  $F(x) \Big|_a^{+\infty} = \lim_{A \rightarrow +\infty} F(x) \Big|_a^A$ . Аналогично записваме

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = F(x) \Big|_{-\infty}^a = F(a) - F(-\infty).$$

**Пример 3.6** *Пресметнете  $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin(bx)dx$ .*

Функцията  $F(x) = -e^{-ax} \frac{a \sin(bx) + b \cos(bx)}{a^2 + b^2}$  е примитивна за подинтегралната функция. Следователно получаваме

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin(bx)dx = F(+\infty) - F(0) = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

**Пример 3.7** *Пресметнете  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$ .*

Функцията

$$F(x) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(x\sqrt{2} + 1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(x\sqrt{2} - 1)$$

е примитивна за подинтегралната функция. Следователно получаваме

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = F(+\infty) - F(0) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

**Пример 3.8** Пресметнете  $\int_{2/\pi}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$ .

Функцията  $F(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$  е примитивна за подинтегралната функция. Следователно получаваме

$$\int_{2/\pi}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx = F(+\infty) - F\left(\frac{2}{\pi}\right) = 1.$$

Задачи:

1) Пресметнете интегралите:

а)  $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}$ ; б)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$ ; в)  $\int_0^{+\infty} x \sin x dx$ ;

г)  $\int_2^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 - 3)^3}}$ ; д)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x + x^3}$ ; е)  $\int_1^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{(4x^2 + 1)^3}}$ .

### 3.2 Свойства на сходящите несобствени интегралы от първи род.

От Определение 3.1 следва, че сходимостта на несобствените интегралы от първи род е еквивалентна на съществуването на границата на функцията  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  при  $x$  клонящо към  $+\infty$ .

Ако преформулираме условието на Коши за съществуване на граница на функция в безкрайността, получаваме критерия на Коши за сходимост на несобствен интеграл от първи род.

**Теорема 3.1** (Критерий на Коши за сходимост на несобствен интеграл) *Интегралът  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  е сходящ тогава и само тогава, когато за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува  $M \in \mathbb{R}$ , така че за всеки  $A_1, A_2 \geq M$  е изпълнено неравенството*

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Ще отбележим, че за разлика от определения интеграл, при несобствения интеграл подинтегралната функция не е задължително да бъде ограничена. Например функцията

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{N} \\ x, & x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

е неограничена и за всяко  $A > 0$  съществува  $\int_0^A f(x) dx$ . От равенството  $\int_0^A f(x) dx = 0$  за всяко  $A > 0$  следва, че несобственият интеграл от първи род е сходящ и  $\int_0^{+\infty} f(x) dx = 0$ .

**Следствие 3.1** Нека  $f : [a, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ . Интегралът  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  е сходящ тогава и само тогава, когато съществува  $M \in \mathbb{R}$ , така че

$$\int_a^A f(x)dx \leq M$$

за всяко  $A \geq a$ .

**Доказателство:** Монотонно растящата функция  $F(x) = \int_a^x f(x)dx$  има граница при  $x$  клонящо към  $+\infty$  тогава и само тогава, когато е ограничена отгоре.  $\square$

**Твърдение 3.2** Ако несобственият интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  е сходящ и  $b > a$ , то интегралът  $\int_b^{+\infty} f(x)dx$  е сходящ и е в сила равенството

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx.$$

**Доказателство:** Според Теорема 3.1 сходимостта на интеграла отляво е еквивалентна на сходимостта на интеграла отдясно.  $\square$

Доказателството на следващите три твърдения следва от Теорема 3.1.

**Твърдение 3.3** Ако несобственият интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  е сходящ, то в сила е

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_A^{+\infty} f(x)dx = 0.$$

**Твърдение 3.4** Ако несобственият интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  е сходящ, то за всяко  $\alpha \in \mathbb{R}$  и интегралът  $\int_a^{+\infty} \alpha f(x)dx$  е сходящ и в сила е равенството

$$\int_a^{+\infty} \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

**Твърдение 3.5** Ако несобствените интеграли  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  и  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  са сходящи, то сходящи са и интегралите  $\int_a^{+\infty} (f(x) \pm g(x))dx$  и в сила са равенствата

$$\int_a^{+\infty} (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx \pm \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$



Задачи:

1) Пресметнете интегралите:

а)  $\int_{e^2}^{+\infty} \left( \frac{1}{x \ln^3 x} + \frac{x^2}{e^x} \right) dx$ ; б)  $\int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{1+x^2} + \frac{x^3}{1+x^4} \right) dx$ .

### 3.3 Критерии за сходимост на несобствени интеграли от първи род

За редица приложни задачи е съществено само дали един несобствен интеграл е сходящ или разходящ без да е необходимо да знаем неговата точна стойност.

**Теорема 3.2** Нека  $f, g : [a, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  и съществува  $A > a$ , така че са в сила неравенството  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  за всяко  $x \in [A, +\infty)$ .

- 1) Ако интегралът  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  е сходящ, то сходящ е и интегралът  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ;  
2) Ако интегралът  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  е разходящ, то разходящ е и интегралът  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ .

**Доказателство:** 1) Нека интегралът  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  е сходящ. Според Теорема 3.1 за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува  $M > 0$ , така че за всеки две  $A_1, A_2 \geq M$  са изпълнени неравенствата

$$\int_{A_1}^{A_2} f(x)dx \leq \int_{A_1}^{A_2} g(x)dx < \varepsilon$$

и следователно интегралът  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  е сходящ.

2) Нека интегралът  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  не е сходящ. Според Теорема 3.1 съществува  $\varepsilon > 0$ , така че за всяко  $M > 0$  съществуват  $A_1, A_2 \geq M$ , така че да са в сила неравенствата

$$\varepsilon \leq \int_{A_1}^{A_2} f(x)dx \leq \int_{A_1}^{A_2} g(x)dx.$$

и следователно интегралът  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  е разходящ. □

**Пример 3.9** Изследвайте за сходимост интеграла  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\ln x \sqrt{x}}$ .

Съществува  $a > 1$ , така че е в сила неравенството  $\frac{1}{\ln x \sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt[4]{x} \sqrt{x}}$  за всяко  $x \in [a, +\infty)$ , защото  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[4]{x}} = 0$ . От разходимостта на интеграла  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$  следва, че интегралът  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\ln x \sqrt{x}}$  е разходящ.

**Пример 3.10** Изследвайте за сходимост интеграла  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x}}$ .

От неравенството  $\frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} \leq \frac{1}{x^2}$  за всяко  $x \in [1, +\infty)$  и сходимостта на интеграла  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$  следва, че интегралът  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x}}$  е сходящ.

**Следствие 3.2** Нека  $f, g : [a, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ . Ако съществува  $L \neq 0$  и  $L < +\infty$ , така че е в сила  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ , то интегралът  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  е сходящ тогава и само тогава, когато е сходящ интегралът  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ .

**Доказателство:** От  $L > 0$  следва, че съществува  $\varepsilon_0$ , така че  $L - \varepsilon_0 > 0$ . От  $L < +\infty$  следва, че  $L + \varepsilon_0 < +\infty$ . От съществуването на границата  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$  следва, че съществува  $A > a$ , така че са изпълнени неравенствата

$$(L - \varepsilon_0)g(x) < f(x) < (L + \varepsilon_0)g(x)$$

за всяко  $x \in [A, +\infty)$ . Съгласно Теорема 3.2 следва, че  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  е сходящ тогава и само тогава, когато е сходящ интегралът  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ .  $\square$

**Пример 3.11** Изследвайте за сходимост интеграла  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x + \sin^2 x}$ .

От границата

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x + \sin^2 x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x + \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{\sin^2 x}{x}} = 1$$

и Следствие 3.2 следва, че интегралът  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x + \sin^2 x}$  е разходящ, защото е разходящ интегралът  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ .

**Пример 3.12** Изследвайте за сходимост интеграла  $\int_1^{+\infty} \frac{3 + \operatorname{arctg} x}{1 + x\sqrt{x}} dx$ .

От границата

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3 + \operatorname{arctg} x}{1 + x\sqrt{x}}}{\frac{1}{x\sqrt{x}}} = 3 + \frac{\pi}{2}$$

и Следствие 3.2 следва, че интегралът  $\int_1^{+\infty} \frac{3 + \operatorname{arctg} x}{1 + x\sqrt{x}} dx$  е сходящ, защото е сходящ интегралът  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ .

**Следствие 3.3** Нека  $f : [a, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  и съществува границата  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^\lambda} = L$ ,  $L \neq 0$ ,  $L \neq \infty$ :

- 1) Ако  $\lambda < -1$ , то интегралът  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  е сходящ;
- 2) Ако  $\lambda \geq -1$ , то интегралът  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  е разходящ.

**Доказателство:** Прилагаме Следствие 3.2 и Пример 3.2. □

**Определение 3.4** Казваме, че несобственият интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  е абсолютно сходящ, ако е сходящ интегралът  $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ .

**Теорема 3.3** Ако интегралът  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  е абсолютно сходящ, то той е сходящ.

**Доказателство:** От неравенството

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) \right| \leq \int_{A_1}^{A_2} |f(x)|$$

и Теорема 3.1 следва, че интегралът  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  е сходящ. □

**Теорема 3.4** Нека  $f, g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  са такива, че интегралът  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  е абсолютно сходящ и функцията  $g$  е ограничена. Тогава интегралът  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$  е абсолютно сходящ.

**Доказателство:** От условието на Теоремата следва, че съществува  $M$ , така че е в сила неравенството  $|f(x)g(x)| \leq M |f(x)|$ . Съгласно Теорема 3.2 интегралът  $\int_a^{+\infty} |f(x)g(x)|dx$  е сходящ и следователно  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$  е абсолютно сходящ интеграл. □

**Пример 3.13** Докажете, че интегралът  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$  е абсолютно сходящ.

Да положим  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  и  $g(x) = \cos x$ . Отчитайки абсолютната сходимост на интеграла  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ , неравенството  $|\cos x| \leq 1$  и Теорема 3.4 заключаваме, че и интегралът  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$  е абсолютно сходящ.

**Теорема 3.5** (Признак на Дирихле) Нека  $f, g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  са такива, че:

- 1) функцията  $f$  е интегрируема във всеки краен интервал  $[a, A]$  и съществува константа  $M$ , така че  $\left| \int_a^A f(x) dx \right| \leq M$ ;
- 2) функцията  $g$  е монотонна и  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ .

Тогавя интегралът  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$  е сходящ.

**Доказателство:** От 2) следва, че за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува  $N$ , така че за всяко  $A \geq N$  е изпълнено неравенството  $|g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$ . Прилагаме втората теорема за средните стойности за  $A_1, A_2 \geq N$  и получаваме, че е изпълнена последователността от неравенствата

$$\begin{aligned} \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)dx \right| &= \left| g(A_1) \int_{A_1}^{\xi} f(x)dx + g(A_2) \int_{\xi}^{A_2} f(x)dx \right| \\ &\leq |g(A_1)| \left| \int_{A_1}^{\xi} f(x)dx \right| + |g(A_2)| \left| \int_{\xi}^{A_2} f(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2M}M + \frac{\varepsilon}{2M}M = \varepsilon \end{aligned}$$

и следователно интегралът  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$  е сходящ. □

**Пример 3.14** Докажете, че несобственият интеграл

$$(36) \quad \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\lambda} dx, \quad a > 0$$

е сходящ за всяко  $\lambda > 0$ .

Ще приложим Теорема 3.5 за функциите  $f(x) = \sin x$  и  $g(x) = \frac{1}{x^\lambda}$ .

От неравенството

$$\left| \int_a^A \sin x dx \right| = |-\cos A + \cos a| = |\cos a - \cos A| \leq 2$$

следва, че функцията  $f$  удовлетворява условие 1) на Теорема 3.5. Функцията  $g(x) = \frac{1}{x^\lambda}$  е монотонно намаляваща и  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^\lambda} = 0$ . Тогава от Теорема 3.5 следва, че интегралът (36) е сходящ.

Аналогично се доказва, че интегралът

$$(37) \quad \int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\lambda} dx, \quad a > 0$$

е сходящ за всяко  $\lambda > 0$ .

**Пример 3.15** *Докажете, че несобственият интеграл*

$$(38) \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

*не е абсолютно сходящ.*

Ако допуснем, че интегралът (38) е абсолютно сходящ, то от неравенството  $\sin^2 x \leq |\sin x|$  следва, че трябва да бъде сходящ и интегралът  $\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$  за всяко  $a > 0$ . От тъждеството

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \frac{1 - \cos(2x)}{x} dx = \frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x} dx$$

получаваме равенството

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx = 2 \int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx + \int_a^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x} dx.$$

От сходимостта на интегралите  $\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$  и  $\int_a^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x} dx$  следва, че интегралът  $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx$  е сходящ, което не е вярно. Следователно допускането не е вярно и интегралът (38) не е абсолютно сходящ.

**Пример 3.16** *Докажете, че несобственият интеграл*

$$(39) \quad \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx, \quad a > 0$$

*е сходящ.*

Ще приложим Теорема 3.5 за функциите  $f(x) = x \sin(x^2)$  и  $g(x) = \frac{1}{x}$ .

От неравенството

$$\left| \int_a^A x \sin(x^2) dx \right| = \left| -\cos A^2 + \cos a^2 \right| = \left| \cos a^2 - \cos A^2 \right| \leq 2$$

следва, че функцията  $f$  удовлетворява условие 1) на Теорема 3.5. Функцията  $g(x) = \frac{1}{x}$  е монотонно намаляваща и  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ . Тогава съгласно Теорема 3.5 интегралът (39) сходящ.

**Теорема 3.6** (Признак на Абел) Нека  $f, g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  са такива, че:

1) Интегралът  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  е сходящ;

2) Функцията  $g$  е монотонна и ограничена.

Тогава интегралът  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$  е сходящ.

**Доказателство:** От ограничеността на  $g$  следва, че съществува  $M$ , така че  $|g(x)| \leq M$ . От сходимостта на  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  и Теорема 3.1 следва, че за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува  $N$ , така че за всеки  $u, v > N$  е изпълнено неравенството  $\left| \int_u^v f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2M}$ . Прилагаме втората теорема за средните стойности за  $A_1, A_2 \geq N$  и установяваме, че са изпълнени неравенствата

$$\begin{aligned} \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x) dx \right| &= \left| g(A_1) \int_{A_1}^{\xi} f(x) dx + g(A_2) \int_{\xi}^{A_2} f(x) dx \right| \\ &\leq |g(A_1)| \left| \int_{A_1}^{\xi} f(x) dx \right| + |g(A_2)| \left| \int_{\xi}^{A_2} f(x) dx \right| < M \frac{\varepsilon}{2M} + M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon. \end{aligned}$$

и следователно интегралът  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$  е сходящ.  $\square$

**Пример 3.17** Докажете, че несобственият интеграл  $\int_0^{+\infty} \arctg(x) \sin(x^2) dx$  е сходящ.

От Пример 3.16 следва, че  $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$  е сходящ. Прилагаме Теорема 3.6 за функциите  $f(x) = \sin(x^2)$  и  $g(x) = \arctg x$ .

**ЗАДАЧИ:**

1) Изследвайте за сходимост интегралите:

$$\text{а) } \int_4^{+\infty} \frac{x^2 - x}{x^2 - 4x + 3} dx; \text{ б) } \int_0^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 2} dx; \text{ в) } \int_1^{+\infty} \frac{x + \sin x}{x^3 + \cos x} dx; \text{ г) } \int_0^{+\infty} \frac{x^3 - x}{x^4 + 5x^3 + 2} dx.$$

2) Изследвайте за сходимост интегралите:

$$\text{a)} \int_1^{+\infty} \frac{x^3 + x^2 - x - 2}{x^3 \sqrt{x} - x + 1} dx; \text{ б)} \int_0^{+\infty} \frac{x^3 + \sin x + \ln x}{x^2 + \sqrt{x}} dx;$$

$$\text{в)} \int_1^{+\infty} \frac{x + \operatorname{arctg} x}{x^3 + \sin^2 x} dx; \text{ г)} \int_0^{+\infty} \frac{x^5 + x^4 + x^3}{e^x + \ln x} dx.$$

3) Изследвайте за сходимост интегралите:

$$\text{a)} \int_1^{+\infty} \frac{\sin x + \cos x}{1 + x^3} dx; \text{ б)} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x \operatorname{arctg} x}{e^x} dx; \text{ в)} \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\cos x}}{x \ln^2 x} dx.$$

4) Изследвайте за сходимост интегралите:

$$\text{a)} \int_1^{+\infty} \frac{\sin x + \cos x}{1 + x} dx; \text{ б)} \int_1^{+\infty} \frac{\sin x \operatorname{arctg} x}{\ln x} dx; \text{ в)} \int_1^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{\ln(\ln x)} dx.$$

5) Изследвайте за сходимост интегралите:

$$\text{a)} \int_1^{+\infty} \operatorname{arctg} x \frac{\sin x + \cos x}{1 + x} dx; \text{ б)} \int_1^{+\infty} \frac{x}{x + 1} \frac{\sin x \operatorname{arctg} x}{\ln x} dx; \text{ в)} \int_2^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \frac{\sin^3 x}{\ln(\ln x)} dx.$$

### 3.4 Смяна на променливите и интегриране по части в несобствения интеграл

**Теорема 3.7** Нека  $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  е непрекъсната функция и  $\varphi : [\alpha, \beta) \rightarrow [a, +\infty)$  е монотонно растяща функция,  $\varphi(\alpha) = a$  и  $\lim_{t \rightarrow \beta} \varphi(t) = +\infty$ . Ако единият от интегралите  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  или  $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dx$  е сходящ, то и другият интеграл е сходящ и е изпълнено равенството

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dx$$

**Доказателство:** От монотонността на  $\varphi$  следва, че съществува нейната обратна функция  $\varphi^{-1}$ . За всеки две  $x_0 \in [a, +\infty)$  и  $t_0 \in [\alpha, \beta)$ , такива че  $\varphi(t_0) = x_0$  можем да приложим формулата за смяна на променливите в определения интеграл

$$\int_a^{x_0} f(x) dx = \int_\alpha^{t_0} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dx.$$

От последното равенство следва, че едновременно съществуват и са равни или едновременно не съществуват двете граници  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$  и  $\lim_{B \rightarrow \beta} \int_\alpha^B f(\varphi(t)) \varphi'(t) dx$ .  $\square$

Ще отбележим, че е възможно несобственият интеграл от първи род след смяна на променливите да се превърне в определен интеграл. В този случай веднага следва сходимостта на несобствения интеграл.

**Пример 3.18** Докажете, че интегралът

$$(40) \quad \int_4^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)\left(x-\frac{1}{4}\right)}}$$

е сходящ.

Да положим  $x = \frac{1}{t^2} : \left[\frac{1}{2}, 0\right) \rightarrow [4, +\infty)$ . Пресмятаме  $dx = -\frac{2dt}{t^3}$  и замества

$$\int_4^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)\left(x-\frac{1}{4}\right)}} = -2 \int_{1/2}^0 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\left(1-\frac{t^2}{4}\right)}} = 2 \int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\left(1-\frac{t^2}{4}\right)}}.$$

След заместването получаваме определен интеграл и следователно интегралът (40) е сходящ.

**Пример 3.19** Докажете, че интегралът

$$(41) \quad \int_0^{+\infty} \sin(x^\lambda) dx.$$

е сходящ за всяко  $\lambda > 1$ .

Да положим  $x = \sqrt[\lambda]{t} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ . Пресмятаме  $dx = \frac{dt}{\lambda \sqrt[\lambda]{t^{\lambda-1}}}$  и замества

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^\lambda) dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}} dt.$$

От неравенството  $\frac{\lambda-1}{\lambda} > 0$  и Пример 3.16 следва, че интегралът (41) е сходящ.

**Теорема 3.8** Нека  $f, g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  имат непрекъснати производни. Ако два от трите израза  $\int_a^{+\infty} f(x)dg(x)$ ,  $f(x).g(x) \Big|_0^{+\infty}$ ,  $\int_a^{+\infty} g(x)df(x)$  имат смисъл (т.е. интегралите  $\int_a^{+\infty} f(x)dg(x)$  и  $\int_a^{+\infty} g(x)df(x)$  са сходящи, съществува границата  $\lim_{A \rightarrow \infty} (f(A)g(A) - f(a)g(a))$ ), то и третият израз има смисъл и е в сила равенството

$$(42) \quad \int_a^{+\infty} f(x)dg(x) = f(x).g(x) \Big|_0^{+\infty} - \int_a^{+\infty} g(x)df(x).$$



**Доказателство:** За всяко  $x_0 \in [a, +\infty)$  можем да приложим формулата за интегриране по части

$$\int_a^{x_0} f(x)dg(x) = f(x).g(x)\Big|_0^{x_0} - \int_a^{x_0} g(x)df(x).$$

Ако два от трите израза  $\int_a^{+\infty} f(x)dg(x)$ ,  $f(x).g(x)\Big|_0^{+\infty}$ ,  $\int_a^{+\infty} g(x)df(x)$  имат смисъл, то можем да извършим граничен преход при  $x_0 \rightarrow +\infty$  и ще бъде в сила равенство (42).  $\square$

**Пример 3.20** Пресметнете  $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ .

Прилагаме формулата за интегриране по части и получаваме

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = -\left(xe^{-x}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-x}dx\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} + 1 = 1$$

**Пример 3.21** Пресметнете  $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx$ .

Прилагаме формулата за интегриране по части и получаваме рекурентна връзка

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx = -\frac{x^n}{e^x}\Big|_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x}dx = n.I_{n-1}.$$

От рекурентната връзка  $I_n = n.I_{n-1}$  следва  $I_n = n!$ .

vsrasc8pt

ЗАДАЧИ:

1) Пресметнете:

а)  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{2\sqrt{x^2-1}}$ ; б)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)}$ .

2) Пресметнете:

а)  $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx$ ; б)  $\int_1^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$ ; в)  $\int_1^{+\infty} \frac{\arctg x}{(1+x^2)^{3/2}} dx$ .

### 3.5 Несобствени интегралы от втори род

**Определение 3.5** Нека  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ . Казваме, че точката  $b$  е особена за функцията  $f$ , ако  $\lim_{x \rightarrow b-} |f(x)| = \infty$  и за всяко  $\varepsilon > 0$  функцията  $f$  е ограничена в интервала  $[a, b - \varepsilon]$ .

**Определение 3.6** Нека  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , точката  $b$  е особена за функцията  $f$  и за всяко  $\varepsilon > 0$  функцията  $f$  е интегруема в интервала  $[a, b - \varepsilon]$ . Ако съществува границата  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$  казваме, че несобственият интеграл от втори род  $\int_a^b f(x)dx$  е сходящ и има стойност

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

**Пример 3.22** Изследвайте за сходимост интеграла

$$(43) \quad \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}.$$

I) Нека  $\lambda = 1$ . Тогава можем да запишем

$$\int_a^b \frac{dx}{b-x} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \ln |b-x| \Big|_a^{b-\varepsilon} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \ln \varepsilon + \ln |b-a| = +\infty.$$

II) Нека  $\lambda \neq 1$ . Тогава имаме

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{(1-\lambda)(b-x)^{\lambda-1}} \Big|_a^{b-\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{(1-\lambda)\varepsilon^{\lambda-1}} - \frac{1}{(1-\lambda)(b-a)^{\lambda-1}} = \begin{cases} \frac{1}{(\lambda-1)(b-a)^{\lambda-1}}, & \lambda < 1 \\ +\infty, & \lambda > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

От I) и II) следва, че интегралът (43) е сходящ при  $\lambda < 1$  и е разходящ при  $\lambda \geq 1$ .

**Определение 3.7** Нека  $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , точката  $a$  е особена за функцията  $f$  и за всяко  $\varepsilon > 0$  функцията  $f$  е интегрируема в интервала  $[a + \varepsilon, b]$ . Ако съществува границата  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$  казваме, че несобственият интеграл от втори род  $\int_a^b f(x)dx$  е сходящ и има стойност

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

**Определение 3.8** Нека  $f : [a, c) \cup (c, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , точката  $c$  е особена за функцията  $f$  и за всяко  $\varepsilon > 0$  функцията  $f$  е интегрируема в интервалите  $[a, c - \varepsilon]$  и  $[c + \varepsilon, b]$ . Ако съществуват границите  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx$  и  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx$  казваме, че несобственият интеграл от втори род  $\int_a^b f(x)dx$  е сходящ и има стойност

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Ако функцията  $f$  има краен брой особени точки в множеството  $\Delta$ , то по аналогия се пренася дефиницията за сходимост на несобствен интеграл. Дефинирането на сходимост на несобствен интеграл от първи и втори род с краен брой особени точки се въвежда като сума от краен брой несобствени интеграла с по една особена точка във всеки интервал на интегриране.

Доказателствата на твърденията са аналогични на тези за несобствени интеграла от първи род.

От Определение 3.1 следва, че сходимостта на несобствените интеграли от първи род е еквивалентна на съществуването на границата на функцията  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  при  $x$  клонящо към  $+\infty$ .

Ако преформулираме условието на Коши за съществуване на граница на функция в безкрайността получаваме критерия на Коши за сходимост на несобствен интеграл от първи род.

**Теорема 3.9** (Критерий на Коши за сходимост на несобствен интеграл) Нека  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  и точката  $b$  е особена за функцията  $f$ . Интегралът  $\int_a^b f(x)dx$  е сходящ тогава и само тогава, когато за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува  $\delta > 0$ , така че за всеки  $0 < \delta_2 < \delta_1 < \delta$  е изпълнено неравенството

$$\left| \int_{b-\delta_1}^{b-\delta_2} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

**Доказателство:** Теорема 3.9 е изказване на критерия на Коши за съществуване на граница на функцията  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  при  $x$  клонящо към  $b$ .  $\square$

**Следствие 3.4** Нека  $f : [a, b) \rightarrow [0, +\infty)$  и точката  $b$  е особена за функцията  $f$ . Интегралът  $\int_a^b f(x)dx$  е сходящ тогава и само тогава, когато съществува  $M \in \mathbb{R}$ , така че

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \leq M$$

за всяко  $\varepsilon > 0$ .

**Доказателство:** Монотонно растящата функция  $F(x) = \int_a^x f(x)dx$  има граница при  $x$  клонящо към  $b$  тогава и само тогава, когато е ограничена отгоре.  $\square$

**Твърдение 3.6** Нека  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  и точката  $b$  е особена за функцията  $f$ . Ако несобственият интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  е сходящ и  $c \in (a, b)$ , то интегралът  $\int_c^b f(x)dx$  е сходящ и е в сила равенството

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

**Доказателство:** Съгласно Теорема 3.9 сходимостта на интеграла отляво е еквивалентна на сходимостта на интеграла отдясно.  $\square$

Доказателството на следващите три твърдения следва от Теорема 3.9.

**Твърдение 3.7** Нека  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  и точката  $b$  е особена за функцията  $f$ . Ако несобственият интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  е сходящ, то е в сила

$$\lim_{c \rightarrow b} \int_c^b f(x)dx = 0.$$

**Твърдение 3.8** Нека  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  и точката  $b$  е особена за функцията  $f$ . Ако несобственият интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  е сходящ, то за всяко  $\alpha \in \mathbb{R}$  е сходящ интегралът  $\int_a^b \alpha f(x)dx$  и в сила е равенството

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx.$$

**Твърдение 3.9** Нека  $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  и точката  $b$  е особена за функцията  $f$ . Ако несобствените интеграли  $\int_a^b f(x)dx$  и  $\int_a^b g(x)dx$  са сходящи, то са сходящи и интегралите  $\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx$  и в сила са равенствата

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

**Теорема 3.10** Нека  $f, g : [a, b) \rightarrow [0, +\infty)$ , точката  $b$  е особена за функцията  $f$  и съществува  $c \in [a, b)$ , така че са в сила неравенствата  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  за всяко  $x \in [c, b)$ .

- 1) Ако интегралът  $\int_a^b g(x)dx$  е сходящ, то е сходящ и интегралът  $\int_a^b f(x)dx$ ;
- 2) Ако интегралът  $\int_a^b f(x)dx$  е разходящ, то е разходящ и интегралът  $\int_a^b g(x)dx$ .

**Доказателство:** 1) Нека интегралът  $\int_a^b g(x)dx$  е сходящ. Съгласно Теорема 3.9 за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува  $\delta > 0$ , така че за всеки две  $0 < \delta_2 < \delta_1 < \delta$  е изпълнено неравенството

$$\int_{b-\delta_1}^{b-\delta_2} f(x)dx \leq \int_{b-\delta_1}^{b-\delta_2} g(x)dx < \varepsilon.$$

Следователно интегралът  $\int_a^b f(x)dx$  е сходящ.

2) Нека интегралът  $\int_a^b f(x)dx$  не е сходящ. Съгласно Теорема 3.9 съществува  $\varepsilon > 0$ , така че за всяко  $\delta > 0$  съществуват  $0 < \delta_2 < \delta_1 < \delta$ , така че да са в сила неравенствата

$$\varepsilon \leq \int_{b-\delta_1}^{b-\delta_2} f(x)dx \leq \int_{b-\delta_1}^{b-\delta_2} g(x)dx.$$

Следователно интегралът  $\int_a^b g(x)dx$  е разходящ. □

**Пример 3.23** Изследвайте за сходимост интеграла  $\int_0^1 \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x-1}}$ .

От неравенството  $\frac{1}{(x+2)\sqrt{x-1}} \leq \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$  за всяко  $x \in [0, 1)$  и сходимостта на интеграла  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-1}}$  следва, че интегралът  $\int_0^1 \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x-1}}$  е сходящ.

**Пример 3.24** Изследвайте за сходимост интеграла  $\int_0^1 \frac{dx}{(x+2)(x-1)^2}$ .

От неравенството  $\frac{1}{(x+2)(x-1)^2} \geq \frac{1}{3(x-1)^2}$  за всяко  $x \in [0, 1)$  и разходимостта на интеграла  $\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2} dx$  следва, че интегралът  $\int_0^1 \frac{dx}{(x+2)(x-1)^2}$  е разходящ.

**Следствие 3.5** Нека  $f, g : [a, b) \rightarrow [0, +\infty)$ , точката  $b$  е особена за функциите  $f$  и  $g$ . Ако съществува  $L \neq 0$  и  $L < +\infty$ , така че е в сила  $\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ , то интегралът  $\int_a^b f(x) dx$  е сходящ тогава и само тогава, когато е сходящ интегралът  $\int_a^b g(x) dx$ .

**Доказателство:** От  $L > 0$  следва, че съществува  $\varepsilon_0$ , така че  $L - \varepsilon_0 > 0$ . От  $L < +\infty$  следва, че  $L + \varepsilon_0 < +\infty$ . От съществуването на границата  $\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$  следва, че съществува  $c \in [a, b)$ , така че са изпълнени неравенствата

$$(L - \varepsilon_0)g(x) < f(x) < (L + \varepsilon_0)g(x)$$

за всяко  $x \in [c, b)$ . Съгласно Теорема 3.10 следва, че  $\int_a^b f(x) dx$  е сходящ тогава и само тогава, когато е сходящ интегралът  $\int_a^b g(x) dx$ .  $\square$

**Пример 3.25** Изследвайте за сходимост интеграла  $\int_0^1 \frac{dx}{\sin^2 x}$ .

От границата

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\frac{1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x^2}{\sin^2 x} = 1,$$

Следствие 3.5 и разходимостта на интеграл  $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$  следва, че интегралът  $\int_0^1 \frac{dx}{\sin^2 x}$  е разходящ.

**Пример 3.26** Изследвайте за сходимост интеграла  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ .

От границата

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\frac{1}{\sqrt{\sin x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}} = 1,$$

Следствие 3.5 и сходимостта на интеграла  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$  следва, че интегралът  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$  е сходящ.

**Следствие 3.6** Нека  $f : [a, b) \rightarrow [0, +\infty)$  и точката  $b$  е особена за функцията  $f$  и съществува границата  $\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{x^\lambda} = L$ ,  $L \neq 0$ ,  $L \neq \infty$ :

- 1) Ако  $\lambda > -1$ , то интегралът  $\int_a^b f(x)dx$  е сходящ;
- 2) Ако  $\lambda \leq -1$ , то интегралът  $\int_a^b f(x)dx$  е разходящ.

**Доказателство:** Прилагаме Следствие 3.5 и Пример 3.22. □

**Определение 3.9** Нека  $f : [a, b) \rightarrow [0, +\infty)$  и точката  $b$  е особена за функцията  $f$ . Казваме, че несобственият интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  е абсолютно сходящ, ако е сходящ интегралът  $\int_a^b |f(x)|dx$ .

**Теорема 3.11** Нека  $f : [a, b) \rightarrow [0, +\infty)$  и точката  $b$  е особена за функцията  $f$ . Ако интегралът  $\int_a^b f(x)dx$  е абсолютно сходящ, то той е сходящ.

**Доказателство:** От неравенството

$$\left| \int_{b-\delta_1}^{b-\delta_2} f(x)dx \right| \leq \int_{b-\delta_1}^{b-\delta_2} |f(x)|dx$$

и Теорема 3.9 следва, че интегралът  $\int_a^b f(x)dx$  е сходящ. □

**Теорема 3.12** Нека  $f, g : [a, b) \rightarrow [0, +\infty)$  и точката  $b$  е особена за функциите  $f$  и  $g$ . Ако

- 1) Интегралът  $\int_a^b f(x)dx$  е абсолютно сходящ;
  - 2) Функцията  $g$  е ограничена,
- то интегралът  $\int_a^b f(x)g(x)dx$  е абсолютно сходящ.

**Доказателство:** От условието на Теоремата следва, че съществува  $M$ , така че е в сила неравенството  $|f(x)g(x)| \leq M |f(x)|$ . Съгласно Теорема 3.10 интегралът  $\int_a^b |f(x)g(x)|dx$  е сходящ и следователно  $\int_a^b f(x)g(x)dx$  е абсолютно сходящ интеграл. □

**Пример 3.27** Докажете, че интегралът  $\int_0^1 \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}} dx$  е абсолютно сходящ.

Да положим  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  и  $g(x) = \sin(1/x)$ . Тъй като  $|\sin(1/x)| \leq 1$  и интегралът  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  е сходящ, то прилагайки Теорема 3.12 получаваме, че  $\int_0^1 \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}} dx$  е абсолютно сходящ.

**Теорема 3.13** (Признак на Дирихле) Нека  $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , точката  $b$  е особена за функциите  $f$  и  $g$ . Ако

1) Функцията  $f$  е интегрируема във всеки краен интервал  $[a, b-\varepsilon)$  и съществува константа  $M$ , така че  $\left| \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx \right| \leq M$ ;

2) Функцията  $g$  е монотонна и  $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = 0$ ,

то интегралът  $\int_a^b f(x)g(x)dx$  е сходящ.

**Доказателство:** От 2) следва, че за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува  $\delta > 0$ , така че за всяко  $x \in (b - \delta, b)$  е изпълнено неравенството  $|g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$ . Прилагайки Теорема 2.13 за  $b - \delta < \delta_1 < \delta_2 < b$  получаваме

$$\begin{aligned} \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)g(x)dx \right| &= \left| g(\delta_1) \int_{\delta_1}^{\xi} f(x)dx + g(\delta_2) \int_{\xi}^{\delta_2} f(x)dx \right| \\ &\leq |g(\delta_1)| \left| \int_{\delta_1}^{\xi} f(x)dx \right| + |g(\delta_2)| \left| \int_{\xi}^{\delta_2} f(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2M} M + \frac{\varepsilon}{2M} M = \varepsilon. \end{aligned}$$

Следователно интегралът  $\int_a^b f(x)g(x)dx$  е сходящ.  $\square$

**Теорема 3.14** (Признак на Абел) Нека  $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , точката  $b$  е особена за функциите  $f$  и  $g$ . Ако

1) Интегралът  $\int_a^b f(x)dx$  е сходящ;

2) Функцията  $g$  е монотонна и ограничена,

то интегралът  $\int_a^b f(x)g(x)dx$  е сходящ.

**Доказателство:** От ограничеността на  $g$  следва, че съществува  $M$ , така че  $|g(x)| \leq M$ . От сходимостта на  $\int_a^b f(x)dx$  и Теорема 3.9 следва, че за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува  $\delta > 0$ , така

че за всеки  $b - \delta < \delta_1 < \delta_2 < b$  е изпълнено неравенството  $\left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2M}$ . Прилагаме Теорема 2.13 за  $b - \delta < \delta_1 < \delta_2 < b$  получаваме

$$\begin{aligned} \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)g(x)dx \right| &= \left| g(\delta_1) \int_{\delta_1}^{\xi} f(x)dx + g(\delta_2) \int_{\xi}^{\delta_2} f(x)dx \right| \\ &\leq |g(\delta_1)| \left| \int_{\delta_1}^{\xi} f(x)dx \right| + |g(\delta_2)| \left| \int_{\xi}^{\delta_2} f(x)dx \right| < M \frac{\varepsilon}{2M} + M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Следователно интегралът  $\int_a^b f(x)g(x)dx$  е сходящ.  $\square$

**Теорема 3.15** Нека  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  е непрекъсната функция,  $\varphi : [\alpha, \beta) \rightarrow [a, b)$  е монотонно растяща функция,  $\varphi(\alpha) = a$  и  $\lim_{t \rightarrow \beta} \varphi(t) = b$ . Ако единият от интегралите  $\int_a^b f(x)dx$  или  $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dx$  е сходящ, то и другият интеграл е сходящ и е в сила равенството

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dx.$$

**Доказателство:** От монотонността на  $\varphi$  следва, че съществува нейната обратна  $\varphi^{-1}$ . За всеки две  $x_0 \in [a, b)$  и  $t_0 \in [\alpha, \beta)$ , такива че  $\varphi(t_0) = x_0$  можем да приложим формулата за смяна на променливите в определения интеграл

$$\int_a^{x_0} f(x)dx = \int_{\alpha}^{t_0} f(\varphi(t))\varphi'(t)dx.$$

От последното равенство следва, че едновременно съществуват и са равни или едновременно не съществуват двете граници  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$  и  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\alpha}^{b-\varepsilon} f(\varphi(t))\varphi'(t)dx$ .  $\square$

Ще отбележим, че е възможно несобственият интеграл от втори род след смяна на променливите да се превърне в определен интеграл или да се превърне в несобствен интеграл от първи род.

**Теорема 3.16** Нека  $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  имат непрекъснати производни. Ако два от трите изрази  $\int_a^b f(x)dg(x)$ ,  $f(x).g(x) \Big|_a^b$ ,  $\int_a^b g(x)df(x)$  имат смисъл, то и третият израз има смисъл и в сила е равенството

$$(44) \quad \int_a^b f(x)dg(x) = f(x).g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x)df(x).$$

**Доказателство:** За всяко  $x_0 \in [a, b)$  можем да приложим формулата за интегриране по части

$$\int_a^{x_0} f(x)dg(x) = f(x).g(x) \Big|_a^{x_0} - \int_a^{x_0} g(x)df(x).$$

Ако два от трите изрази  $\int_a^b f(x)dg(x)$ ,  $f(x).g(x) \Big|_a^b$ ,  $\int_a^b g(x)df(x)$  имат смисъл, то можем да извършим граничен преход при  $x_0 \rightarrow +\infty$  и ще бъде в сила равенство (44).  $\square$



## 4 Приложение на определения интеграл в математически анализ

### 4.1 Приближено пресмятане на числото $\pi$

**Пример 4.1** Докажете че са изпълнени равенствата

$$J_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^m x dx = \begin{cases} \frac{(m-1)!!}{m!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & m = 2k \\ \frac{(m-1)!!}{m!!}, & m = 2k-1 \end{cases}$$

за всяко  $m \in \mathbb{N}$ .

След интегриране по части

$$\begin{aligned} J_m &= \int_0^{\pi/2} \sin^m x dx = - \int_0^{\pi/2} \sin^{m-1} x d(\cos x) \\ &= - \sin^{m-1} x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + (m-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} \cos^2 x dx \\ &= (m-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} (1 - \sin^2 x) dx \\ &= (m-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} dx - (m-1) \int_0^{\pi/2} \sin^m dx = (m-1)J_{m-2} - (m-1)J_m \end{aligned}$$

получаваме рекурентната връзка  $J_m = \frac{m-1}{m} J_{m-2}$ . Следователно

$$J_{2k} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2k} x dx = \frac{(2k-1)(2k-3) \dots 3 \cdot 1}{2k(2k-2) \dots 4 \cdot 2} \int_0^{\pi/2} dx = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

и

$$J_{2k+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2k+1} x dx = \frac{(2k)(2k-2) \dots 4 \cdot 2}{(2k+1)(2k-1) \dots 3 \cdot 1} \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}.$$

**Пример 4.2** (Формула на Уолис) Докажете че е вярна формулата

$$(45) \quad \frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+1}.$$

След интегриране на неравенствата

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x$$

получаваме неравенствата

$$(46) \quad \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx < \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx < \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x dx.$$

От Пример 4.1 и (46) следват неравенствата

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

или

$$\left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n}.$$

От неравенството

$$\begin{aligned} I &= \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n} - \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+1} = \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \left( \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n(2n+1)} = \left( \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n} = \left( \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} \right)^2 \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

получаваме

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n} - \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+1} = 0,$$

т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+1} = 0.$$

Следователно

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+1}.$$

Формулата на Уолис има историческо значение, като първото представяне на числото  $\pi$  във вида на граница, която лесно може да се пресмята с произволна точност  $\varepsilon$ .

Джон Уолис (1616 - 1703) е английски математик, логик и философ. Уолис въвежда символа  $\infty$  за означение на безкрайността и символа  $\frac{1}{\infty}$  за означаване на обекти, които са толкова малки, че не могат да бъдат видяни или измерени. Уолис получава първоначалното си образование в местното училище. Учи медицина в университета в Кембридж. След дипломирането си става свещеник. Той е от съоснователите на Британското кралско научно дружество. Преподава геометрия в Оксфордския университет от 1649 година до края на живота си. Уолис се опитва да постави криптографията на математическа основа. Той се занимава с тригонометрия, математически анализ, геометрия. Той въвежда термина непрекъсната дроб, представянето на числата като отсечки върху реалната права.



Фигура 10: John Wallis

**Пример 4.3** Намерете с точност  $\varepsilon$  стойността на  $\pi$ .

Използваме неравенството

$$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{2}{2n+1} < \pi < \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{2}{2n}.$$

от Пример 4.2. От неравенството

$$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{2}{2n} - \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{2}{2n+1} < \frac{1}{n}$$

следва, че за всяко  $\varepsilon > 0$ , ако изберем  $n = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ , то  $\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{2}{2n+1}$  и  $\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{2}{2n}$  ще са приближени стойности съответно отдолу и отгоре на  $\pi$  с точност  $\varepsilon$ .

С помощта на *Maple* пресмятаме приближените стойности на  $\pi$  за  $\varepsilon = 10^{-k}$ ,  $k = 1, 2, \dots, 8$ . За да намалим пресмятанията ще намерим по-точно индекса  $n = \left\lceil \frac{2.4}{\varepsilon \cdot 3.5} \right\rceil + 1$ , като използваме неравенството

$$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n} - \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n+1} = \left(\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}\right)^2 \frac{1}{2n} < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2n}.$$

*for k from 1 to 8 do*

$\varepsilon := \frac{1}{10^k} : n := \text{floor}\left(\frac{2 \cdot 4}{\varepsilon \cdot 3 \cdot 5}\right) + 1 :$

$t := \text{time}() :$

$p := \text{evalf}\left(\left(\prod_{i=1}^n \frac{2 \cdot i}{2 \cdot i - 1} \cdot \frac{2}{2 \cdot n + 1}\right)^2, k+2\right) : q := \text{evalf}\left(\frac{p \cdot (2 \cdot n + 1)}{2 \cdot n}, k+2\right) :$

$st := \text{time}() - t :$

$\text{print}(\text{evalf}(\varepsilon), p, \text{evalf}(\pi), q, st)$

$\varepsilon$	$n$	$a_n$	$\pi$	$b_n$	време
0.1	6	3.02	3.14	3.28,	0. sec
0.01	54	3.127	3.142	3.156	0. sec
0.001	534	3.1401	3.1416	3.1430	0.016 sec
0.0001	5334	3.14145	3.14159	3.14174	0.109 sec
0.00001	5334	3.141578	3.141593	3.141608	1 min 7.769 sec
0.000001	53334	3.1415912	3.1415927	3.1415941	27 min 8.578 sec

От горната таблица виждаме, че пресмятането на  $\pi$  с формулата на Уолис е много бавно. Това се дължи от една страна на бавната сходимост на двете редици  $a_n \leq \pi \leq b_n$  и от друга страна се дължи на факта, че членовете на двете редици са произведения на реални числа. Операциите умножение и деление са време-изискващи операции за компютрите, докато операциите събиране и изваждане се изпълняват много по-бързо.

За бързо пресмятане на  $\pi$  се използва формулата:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{6 \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2}} = \pi.$$

**Пример 4.4** (Интеграл на Ойлер-Поасон) Докажете равенството

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ще използваме неравенството  $(1+t)e^{-t} < 1$ , което е изпълнено за всяко  $t \in \mathbb{R}$ . Полагаме  $t = \pm x^2$  и получаваме неравенствата

$$(1-x^2)e^{x^2} < 1 \text{ и } (1+x^2)e^{-x^2} < 1.$$

От последните две неравенства следват неравенствата

$$(47) \quad 1-x^2 < e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2}$$

за всяко  $x > 0$ . От (47) следват неравенствата

$$(48) \quad (1-x^2)^n < e^{-nx^2}, \quad x \in (0, 1)$$

и

$$(49) \quad e^{-nx^2} < \frac{1}{(1+x^2)^n}, \quad x \in (0, +\infty).$$

Интегрираме (48) и (49) и получаваме

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx < \int_0^1 e^{-nx^2} dx < \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx < \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

Да положим  $K = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ . След полагане  $u = \sqrt{nx}$  следва тъждеството  $\int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx = \frac{K}{\sqrt{n}}$ . Полагаме последователно  $x = \cos t$  и  $x = \cot g t$  и получаваме

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t dt = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

и

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} t dt = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

От последните две равенства следват неравенствата

$$(50) \quad \frac{n}{2n+1} \cdot \frac{((2n)!!)^2}{((2n-1)!!)^2 (2n+1)} < K^2 < \frac{n}{2n-1} \cdot \frac{((2n-3)!!)^2 (2n-1)}{((2n-2)!!)^2} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

След граничен преход в (50), като използваме границата (45) получаваме  $K^2 = \frac{\pi}{4}$ , т.е. равенството (47).

Симеон Поасон (1781 – 1840) е френски математик и физик. Поасон е син на войник. Приет първи в класирането в *Ecole Polytechnique* в Париж от самото начало привлича вниманието на преподавателите си. Още през втората година на следването си публикува две научни статии. Известните вече учени Лагранж и Лаплас го приемат като приятел. Баща му го възпитава на омраза към аристократите и вяра в идеите на Първата Република, но Поасон няма интереси към политиката и е концентриран само върху математиката. Избран е за член на кралското общество и на Шведската кралска академия на науките. Революцията през 1830 отнема почестите, които Поасон има. В последствие е възстановен и му е присъдено най-високото отличие *peer of France*. Поасон е изключително продуктивен. Публикува над 300 научни статии. Занимава се основно в областта на приложената математика и математическата физика.



Фигура 11: Simeon Poisson

## 4.2 Интегрален вид на остатъчния член във формулата на Тейлор

**Теорема 4.1** (Обобщена формула за интегриране по части) Нека функциите  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  са непрекъснати заедно с участващите във формула (51) производни. Тогава е в сила равенството:

$$(51) \quad \int_a^b f(x)g^{(n+1)}(x)dx = \sum_{k=0}^n (-1)^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x) \Big|_a^b + (-1)^{n+1} \int_a^b f^{(n+1)}(x)g(x)dx.$$

**Доказателство:** Прилагаме формулата за интегриране по части и получаваме равенствата

$$\begin{aligned} \int f(x)g^{(n+1)}(x)dx &= \int f(x)dg^{(n)}(x) = f(x)g^{(n)}(x) - \int f^{(1)}(x)g^{(n)}(x)dx \\ \int f^{(1)}(x)g^{(n)}(x)dx &= \int f^{(1)}(x)dg^{(n-1)}(x) = f^{(1)}(x)g^{(n-1)}(x) - \int f^{(2)}(x)g^{(n-1)}(x)dx \end{aligned}$$

$$\int f^{(2)}(x)g^{(n-1)}(x)dx = \int f^{(2)}(x)dg^{(n-2)}(x) = f^{(2)}(x)g^{(n-2)}(x) - \int f^{(3)}(x)g^{(n-2)}(x)dx$$

.....

$$\int f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x)dx = \int f^{(k)}(x)dg^{(n-k)}(x) = f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x) - \int f^{(k+1)}(x)g^{(n-k)}(x)dx$$

.....

$$\int f^{(n)}(x)g^{(1)}(x)dx = \int f^{(n)}(x)dg(x) = f^{(n)}(x)g(x) - \int f^{(n+1)}(x)g(x)dx.$$

След умножение на горните равенства с  $(-1)^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  и почленно им събиране получаваме, че  $\sum_{k=0}^n (-1)^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$  е примитивна на функцията  $f(x)g^{(n+1)}(x) - (-1)^{n+1}f^{(n+1)}(x)g(x)$  и следователно

$$\int_a^b \left( f(x)g^{(n+1)}(x) - (-1)^{n+1}f^{(n+1)}(x)g(x) \right) dx = \sum_{k=0}^n (-1)^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x) \Big|_a^b.$$

□

**Теорема 4.2** Нека  $f$  има непрекъснати производни до ред  $n+1$  в интервала с краища  $a$  и  $x$ . Тогава е вярна формулата на Тейлор с остатъчен член в интегрален вид:

$$(52) \quad f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

**Доказателство:** Да разгледаме функцията  $g(t) = (x-t)^n$ . От равенството

$$g^{(k)}(t) = ((x-t)^n)^{(k)} = \begin{cases} (-1)^k n(n-1) \dots (n-k+1)(x-t)^{n-k}, & k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

и Теорема 4.1 приложена за функциите  $f(x)$  и  $g(x) = (x-t)^n$  получаваме

$$0 = \int_a^x f(t)g^{(n+1)}(t)dt = \sum_{k=0}^n (-1)^k f^{(k)}(t) ((x-t)^n)^{(n-k)} \Big|_a^x + (-1)^{n+1} \int_a^x f^{(n+1)}(x)g(x)dx.$$

След преобразувания намираме

$$\begin{aligned} 0 &= (-1)^{n+1} \left( -n!f(x) + n!f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{n!}{2!}f^{(2)}(a)(x-a)^2 \right. \\ &\quad + \frac{n!}{3!}f^{(3)}(a)(x-a)^3 + \dots + \frac{n!}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + \frac{n!}{n!}f^{(n)}(a)(x-a) \\ &\quad \left. + \int_a^x f^{(n+1)}(x)g(x)dx \right), \end{aligned}$$

което е формула (52). □

С помощта на интегралната форма на остатъка във формулата на Тейлор се получават другите остатъчни членове. Например след прилагане на Теоремата за средните стойности получаваме

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \int_a^x (x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1},$$

което е остатъчният член във вида на Лагранж.

### 4.3 Трансцендентност на числото $e$

**Определение 4.1** *Казваме, че реалното число  $\alpha$  е алгебрично, ако е корен на полином с цели коефициенти. Ако едно число не е алгебрично, казваме че то е трансцендентно.*

Всяко рационално число  $\frac{p}{q}$  е алгебрично. Наистина  $px - q = 0$  има за корен числото  $\frac{p}{q}$ . Числото  $\sqrt[n]{2}$  е алгебрично, защото е корен на  $x^n - 2 = 0$ . Числото  $\sqrt{1 + \sqrt[3]{3}}$  също е алгебрично, защото е корен на  $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 3 = 0$ .

**Теорема 4.3 (Ермит)** *Неперовото число  $e$  е трансцендентно число.*

**Доказателство:** Да допуснем, че числото  $e$  е корен на някой полином с цели коефициенти

$$c_0 + c_1 e + c_2 e^2 + c_3 e^3 + \dots + c_m e^m = 0.$$

Прилагаме Теорема 4.1 с  $f$  – произволен полином от степен  $n$  и  $g(x) = (-1)^{n+1} e^{-x}$  и получаваме

$$(53) \quad \int_0^b f(x) e^{-x} dx = -e^{-x} \left( f(x) + f^{(1)}(x) + f^{(2)}(x) + \dots + f^{(n)}(x) \right) \Big|_0^b.$$

Да положим  $F(x) = f(x) + f^{(1)}(x) + f^{(2)}(x) + \dots + f^{(n)}(x)$ . От (53) получаваме равенството

$$(54) \quad e^b F(0) = F(b) + e^b \int_0^b f(x) e^{-x} dx.$$

Заместваме  $b = 0, 1, 2, \dots, m$ , умножаваме с  $c_i$ , събираме почленно (54) и получаваме тъждеството

$$(55) \quad 0 = \sum_{i=0}^m c_i F(i) + \sum_{i=0}^m c_i e^i \int_0^i f(x) e^{-x} dx,$$

което трябва да бъде в сила за всеки полином  $f$ .

Да изберем  $f(x) = \frac{x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p \dots (x-m)^p}{(p-1)!}$ , където  $p$  е просто число, което е по-голямо от  $m$  и  $|c_0|$ . Коефициентите на  $f^{(k)}$  за  $k \geq p$  са цели числа и се делят на  $p$ . Следователно за всяко цяло число  $s$  получаваме, че  $f^{(k)}(s) = j \cdot p$  за всяко  $k \geq p$  и  $f^{(k)}(i) = 0$  за всяко  $k < p$  и всяко  $i = 0, 1, 2, \dots, m$ . От казаното до тук получаваме, че  $F(i)$  са цели числа, кратни на  $p$  за всяко  $i = 1, 2, \dots, m$ . Равенството  $f^{(k)}(0)$  е изпълнено само за  $k \leq p-2$  и следователно е в сила представянето  $F(0) = \sum_{k=0}^{p-2} f^{(k)}(0) + \sum_{k=p-1}^{\infty} f^{(k)}(0) = \sum_{k=p-1}^{\infty} f^{(k)}(0)$ . Числото  $F(0)$  не се дели на  $p$ , защото сумата  $\sum_{k=p}^{\infty} f^{(k)}(0)$  се дели на  $p$ , но събиращомото  $f^{(p-1)}(0) = (-1)^p (m!)^p$  не се дели на  $p$ . От избора  $c_0$  да не се дели на  $p$  следва, че сумата  $\sum_{i=0}^m c_i F(i)$  е цяло число, което не се дели на  $p$  и следователно  $\sum_{i=0}^m c_i F(i) > 0$ .

От неравенството  $|f(x)| < \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!}$ , което е изпълнено за всяко  $x \in [0, m]$  получаваме неравенствата

$$\left| \int_0^i f(x) e^{-x} dx \right| < \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!} \int_0^i e^{-x} dx < \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!} (-e^{-t} + 1) < \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!}.$$

Да означим  $C = \sum_{i=0}^m |c_i|$ . От неравенството

$$\left| \sum_{i=0}^m c_i e^i \int_0^i f(x) e^{-x} dx \right| < C e^m \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!} = C e^m m^m \frac{(m^{m+1})^{p-1}}{(p-1)!} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$$

следва, че за достатъчно големи  $p$  сумата в (55) не може да бъде нула и достигнахме до противоречие. Следователно не може да бъде корен на полином с цели коефициенти.  $\square$

Чарлс Ермит (1822 – 1901) е френски математик. Ермит се ражда с деформация на десния си крак. Ермит много желае да учи в *Ecole Polytechnique* и се подготвя цяла година при Каталан за приемните изпити. Издържва успешно изпитите и е приет за студент. Втората година от следването му е отказано да продължи поради недъга си. По това време *Ecole Polytechnique* е военна академия. Като дете Ермит чете някои от трудовете на Лагранж и Гаус. През 1842 г. Ермит прави първия си принос в математиката, като дава просто доказателство на твърдението на Абел, че не е възможно да се намери алгебричен израз за корените на произволен полином от пета степен. Ермит става член на академията на науките и става професор в *Ecole Polytechnique*.

Линдеман (Lindemann) използва техниката на Ермит при доказателството, че  $\pi$  е трансцендентно число. По този начин той първи установява, че задачата за квадратурата на кръга е неразрешима.



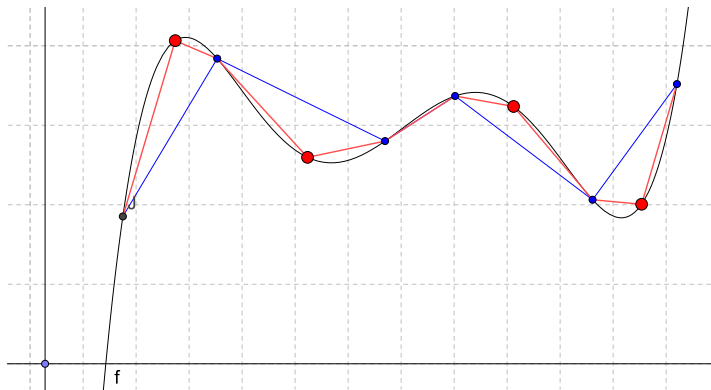
Фигура 12: Charles Hermite



## 5 Приложение на определения интеграл в геометрията

### 5.1 Дължина на крива

Нека кривата  $k$  е дефинирана от графиката на функцията  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  и  $\{x\}$  е деление на интервала  $[a, b]$ . Начупена линия отговаряща на делението  $\{x\}$  наричаме кривата съставена от отсечките с краища  $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$  и  $(x_i, f(x_i))$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  (Фигура 13). Дължина на начупената линия наричане сумата от дължините на съставлящите я отсечки.



Фигура 13: Дължина на крива

**Определение 5.1** Казваме, че кривата линия  $k$  има дължина, ако множеството от дължините на всички начупени линии с върхове върху кривата  $k$  е ограничено отгоре. Криви които удовлетворяват това условие наричаме ректифицируеми и имат дължина равна на точната горна граница от дължините на всички начупени линии с върхове върху кривата  $k$ .

**Лема 5.1** Нека кривата  $k$  е дефинирана от графиката на функцията  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Ако  $\{y\}$  е дробно деление на делението  $\{x\}$  на интервала  $[a, b]$ , то дължината на начупената линия, което отговаря на делението  $\{y\}$  е по-голяма от дължината на начупената линия, която отговаря на делението  $\{x\}$

**Доказателство:** Ще докажем твърдението, когато дробното деление  $\{y\}$  се получава от  $\{x\}$  с добавянето на една точка.

Нека  $\{y\}$  е получено чрез добавянето на точката  $y \in (x_{i-1}, x_i)$ . От неравенството на триъгълника

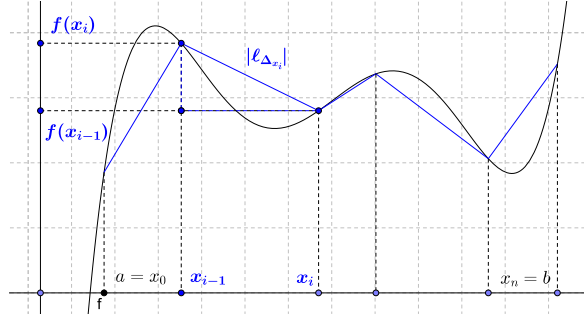
$$|\ell_{(x_{i-1}, x_i)}| \leq |\ell_{(x_{i-1}, y)}| + |\ell_{(y, x_i)}|$$

следва, че  $|\ell_x| \leq |\ell_y|$ .

**Теорема 5.1** Ако функцията  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  има непрекъсната първа производна, тогава кривата  $k$ , която е определена от  $(x, f(x))$  е ректифицируема и дължината ѝ е равна на  $|k| = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ .

**Доказателство:** Нека да разгледаме кривата  $k$ , определена с  $(x, f(x))$ . Нека  $\{x\}$  е произволно деление на интервала  $[a, b]$ . Да разгледаме начупената линия  $\ell_x$  с върхове в точките  $(x_i, f(x_i))$ . За дължината на всяка от съставлящите отсечки е в сила равенството (Фиг. 14)

$$|\ell_{\Delta x_i}| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$



Фигура 14: Дължина на  $\ell_{\Delta_{x_i}}$

Според Теоремата на Лагранж съществуват  $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ , така че дължината на начупената линия  $\ell_x$  е равна на

$$\begin{aligned}
 |\ell_x| &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} \\
 (56) \quad &= \sum_{i=1}^n \left( (x_i - x_{i-1}) \sqrt{1 + \left( \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \right)^2} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot \Delta_{x_i}.
 \end{aligned}$$

От непрекъснатостта на  $f'$  следва, че съществува константа  $M$ , така че  $|f'(x)| \leq M$  за всяко  $x \in [a, b]$ . От равенството (56) получаваме неравенството

$$|\ell_x| \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + M^2} \cdot \Delta_{x_i} = \sqrt{1 + M^2} (b - a)$$

и следователно множеството от дължините на всички начупени линии с върхове върху кривата  $k$  е ограничено и съгласно Определение 5.1 кривата  $k$  е ректифицируема.

От Определение 5.1 следва, че за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува деление  $\{x\}$ , така че  $|k| - |\ell_x| < \frac{\varepsilon}{2}$ . От интегрируемостта на функцията  $\sqrt{1 + (f')^2}$  следва, че за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува  $\delta > 0$ , така че за всяко деление  $\{y\}$  с диаметър по-малък от  $\delta$  е изпълнено неравенството

$$\left| \sigma \left( \sqrt{1 + (f')^2}, \{y\}, \{\xi\} \right) - \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Нека да добавим, колкото е необходимо точки към делението  $\{x\}$ , така че новополученото деление  $\{y\}$  да бъде с диаметър по-малък от  $\delta$ . Отчитайки Лема 5.1 получаваме неравенството  $|k| - \ell_y \leq |k| - \ell_x < \frac{\varepsilon}{2}$ . Тогава от неравенствата

$$\left| |k| - \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \right| \leq ||k| - \ell_y| + \left| \ell_y - \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

и от произволния избор на  $\varepsilon > 0$  следва, че  $|k| = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ . □

**Пример 5.1** Намерете дължината на кривата  $f(x) = e^x$ ,  $[a, b]$ .

Прилагаме Теорема 5.1 и получаваме

$$\begin{aligned} |k| &= \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + e^{2x}} dx \\ &= \left( \sqrt{1 + e^{2x}} + \frac{\ln(\sqrt{1 + e^{2x}} - 1)}{2} - \frac{\ln(\sqrt{1 + e^{2x}} + 1)}{2} \right) \Big|_a^b \\ &= \sqrt{1 + e^{2b}} - \sqrt{1 + e^{2a}} + \ln \left( \sqrt{\frac{\sqrt{1 + e^{2b}} - 1}{\sqrt{1 + e^{2b}} + 1}} \right) - \ln \left( \sqrt{\frac{\sqrt{1 + e^{2a}} - 1}{\sqrt{1 + e^{2a}} + 1}} \right). \end{aligned}$$

**Пример 5.2** Намерете дължината на параболата  $f(x) = px^2$ ,  $p > 0$ ,  $x \in [a, b]$ .

Съгласно Теорема 5.1 имаме

$$\begin{aligned} |k| &= \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + 4p^2 x^2} dx \\ &= \left( \frac{x\sqrt{1 + 4p^2 x^2}}{2} + \frac{\ln(2px + \sqrt{1 + 4p^2 x^2})}{4p} \right) \Big|_a^b \\ &= \frac{b\sqrt{1 + 4p^2 b^2} - a\sqrt{1 + 4p^2 a^2}}{2} + \ln \left( \sqrt[4p]{\frac{2pb + \sqrt{1 + 4p^2 b^2}}{2pa + \sqrt{1 + 4p^2 a^2}}} \right). \end{aligned}$$

**Пример 5.3** Намерете дължината на окръжност с радиус  $r$ .

Да разгледаме окръжност с център координатното начало и радиус  $r$ . Дължината на частта от окръжността намираща се в първи квадрант е една четвърт от дължината на цялата окръжност. Функцията, която задава частта от окръжността, намираща се в първи квадрант е  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$ . Прилагаме Теорема 5.1 и за пресмятането на интеграла използваме субституцията  $x = r \sin t$

$$\begin{aligned} |k| &= \int_0^r \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = r \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} \\ &= r \int_0^{\pi/2} \frac{r \cos t}{\sqrt{r^2(1 - \sin^2 t)}} dt = r \int_0^{\pi/2} \frac{r \cos t}{r |\cos t|} dt = r \int_0^{\pi/2} dt = \frac{r\pi}{2}. \end{aligned}$$

Следователно дължината на кръга е равна на  $4|k| = 2\pi r$ .

ЗАДАЧИ:

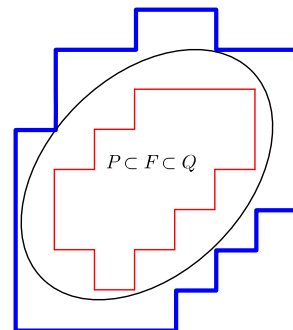
- 1) Намерете дължината на частта от кривата  $y^2 = x^3$  заключена между пресечните точки с правата  $x = \frac{4}{3}$ .
- 2) Намерете дължината на частта от кривата  $y = \ln(\cos x)$ ,  $x \in [0, \pi/4]$ .
- 3) Намерете дължината на частта от кривата  $y = \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)$ ,  $x \in [a, b]$ .
- 4) Намерете дължината на частта от кривата  $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$ ,  $x \in [1, 2]$ .
- 5) Намерете дължината на кривата  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ .

## 5.2 Лице на криволинеен трапец

**Определение 5.2** Многоъгълна фигура в равнината наричаме фигура, която се състои от краен брой ограничени многоъгълници.

Всяка многоъгълна фигура  $P$  може да се разбие на краен брой триъгълници и сумата от лицата на тези триъгълници е лицето  $\mu(P)$  на многоъгълната фигура.

**Определение 5.3** Казваме, че многоъгълната фигура  $P$  е вписана във фигурата  $F$ , ако  $P \subseteq F$ . Казваме, че многоъгълната фигура  $Q$  е описана около фигурата  $F$ , ако  $Q \supseteq F$  (Фиг. 15).



Нека  $F$  е произволна ограничена равнинна фигура (ограничена равнинна фигура наричаме фигура, която се съдържа в някой квадрат). Съществуват точната горна граница  $\mu_*(F) = \sup\{\mu(P) : P \subseteq F\}$  и точната долна граница  $\mu^*(F) = \sup\{\mu(P) : P \subseteq F\}$ , защото  $F$  е ограничена и лицето на всяка вписана фигура е по малко от лицето на всяка описана фигура

Фигура 15: Вписан и описан многоъгълник

**Определение 5.4** Казваме, че равнинната фигура  $F$  е измерима, ако  $\mu_*(F) = \mu^*(F)$ . Числото  $\mu(F) = \mu_*(F) = \mu^*(F)$  наричаме лице на  $F$ .

**Теорема 5.2** Равнинната фигура  $F$  е измерима тогава и само тогава, когато за всяко  $\varepsilon > 0$  съществуват описана многоъгълна фигура  $Q$  и вписана многоъгълна фигура  $P$ , такива че

$$(57) \quad \mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon.$$

**Доказателство:** Нека  $F$  е измерима. Следователно  $\mu(F) = \mu_*(F) = \mu^*(F)$ . От дефиницията на  $\mu_*$  и  $\mu^*$  следва, че за всяко  $\varepsilon > 0$  съществуват  $Q \supseteq F$  и  $P \subseteq F$ , така че

$$\mu - \frac{\varepsilon}{2} = \mu_* - \frac{\varepsilon}{2} < \mu(P) \leq \mu_* = \mu^* \leq \mu^*(Q) < \mu^* + \frac{\varepsilon}{2} = \mu + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Нека е изпълнено условието (57). От неравенствата

$$\mu(P) \leq \mu_* \leq \mu^* \leq \mu(Q)$$

следват неравенствата

$$0 \leq \mu_* - \mu^* \leq \mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon.$$

От произволния избор на  $\varepsilon > 0$  следва  $\mu_* = \mu^*$ . □

**Следствие 5.1** *Равнинната фигура  $F$  е измерима тогава и само тогава, когато за всяко  $\varepsilon > 0$  съществуват описана измерима фигура  $Q$  и вписана измерима фигура  $P$ , такива че*

$$(58) \quad \mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon.$$

**Определение 5.5** *Криволинеен трапец наричаме фигура, която е заградена от графиката на непрекъснатата функция  $f : [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$ , правите  $x = a$ ,  $x = b$  и правата  $y = 0$ .*

**Теорема 5.3** *Криволинейният трапец е измерима фигура и има лице равно на*

$$(59) \quad S = \int_a^b f(x) dx.$$

**Доказателство:** От непрекъснатостта на функцията  $f$  следва, че съществува интегралът (59). За всяко  $\varepsilon > 0$  съществува деление  $\{x\}$  на сегмента  $[a, b]$ , така че

$$S(f, \{x\}) - s(f, \{x\}) < \varepsilon.$$

Да означим криволинейния трапец с  $F$ . По дефиниция  $S(f, \{x\})$  и  $s(f, \{x\})$  са равни на лицата на две многоъгълни фигури, такива че едната съдържа фигурата  $F$ , а другата се съдържа във фигурата  $F$ . Съгласно Теорема 5.2 фигурата  $F$  е измерима и има лице, представено с (59). □

**Пример 5.4** *Пресметнете лицето на елипсата  $k : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .*

Лицето на елипсата  $k$  е равно на четири пъти лицето на частта от елипсата  $k$ , която се намира в първи квадрант. Частта от  $k$ , която се намира в първи квадрант е криволинеен трапец, който е ограничен от кривата  $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ ,  $x \in [0, a]$ . Пресмятаме

$$\mu(k) = 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = 4 \left( \frac{ab}{2} \arcsin \left( \frac{x}{a} \right) + \frac{bx \sqrt{a^2 - x^2}}{2a} \right) \Big|_0^a = ab\pi.$$

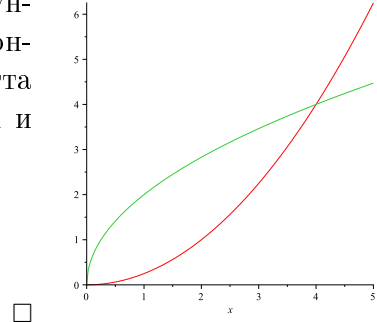
**Следствие 5.2** Ако фигурата  $A$  е ограничена от непрекъснатите функции  $g(x) \leq f(x)$  и правите  $x = a$ ,  $x = b$ , то тя е измерима и има лице

$$(60) \quad S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

**Доказателство:** Да разгледаме първо случая, когато  $0 \leq g(x) \leq f(x)$  за всяко  $x \in [a, b]$ . Да означим лицето на криволинейните трапеци определени съответно от  $f$  и  $g$  с  $F$  и  $G$ . От равенството  $\mu(A) = \mu(F) - \mu(G)$  и Теорема 5.3 получаваме формула (60).

Ако съществува  $x_0$ , така че  $g(x_0) < 0$ , то разглеждаме функциите  $0 \leq g_1(x) = g(x) + C \leq f_1(x) = f(x) + C$ , където  $C$  е константата, чието съществуване се гарантира от непрекъснатостта на  $g$ . Фигурата заградена от  $f_1$  и  $g_1$  е еднаква с фигурата  $A$  и следователно

$$\mu(A) = \int_a^b (f_1(x) - g_1(x)) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$



□

**Пример 5.5** Пресметнете лицето на фигурата  $F$  заградена от параболите  $y^2 = 2px$ ,  $x^2 = 2py$ .

Фигура 16: Фигурата  $F$  заградена от параболите  $y^2 = 2px$  и  $x^2 = 2py$

Лесно се съобразява, че фигурата  $F$  е заградена от кривите  $0 \leq \frac{x^2}{2p} \leq \sqrt{2px}$ ,  $x \in [0, 2p]$  (Фиг. 16). Пресмятаме

$$\mu(F) = \int_0^{2p} \left( \sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p} \right) dx = \left( \frac{2}{3} \sqrt{2px^3} - \frac{x^3}{6p} \right) \Big|_0^{2p} = \frac{8p^2}{3}.$$

**Следствие 5.3** Нека фигурата  $A$  е ограничена от непрекъснатите функции  $g(x)$ ,  $f(x)$  и правите  $x = a$ ,  $x = b$ . Ако съществуват краен брой точки  $\{x_i\}$ , така че  $f(x_i) = g(x_i)$ , то  $A$  е измерима фигура и има лице

$$(61) \quad S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

**Доказателство:** Разделяме интервала  $[a, b]$  на краен брой интервали  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ . Във всеки един от интервалите  $[x_{n-1}, x_n]$  е изпълнено или неравенството  $g(x) \leq f(x)$ , или неравенството  $f(x) \leq g(x)$ . Съгласно Следствие 5.2 фигурата  $A$  е измерима и е в сила формула (61). □

**Пример 5.6** Пресметнете лицето на фигурата  $F$  заградена от функциите  $f(x) = \sin x$ ,  $g(x) = \cos(x)$  и правите  $x = 0$ ,  $x = 2\pi$ .

Определяме знаците на функцията  $\sin x - \cos x$  и поучаваме

$$|\sin x - \cos x| = \begin{cases} \cos x - \sin x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right] \\ \sin x - \cos x, & x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]. \end{cases}$$

Следователно лицето на фигурата  $F$  е равно на

$$\begin{aligned} \mu(F) &= \int_0^{2\pi} |\sin x - \cos x| dx \\ &= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x) dx + \int_{5\pi/4}^{2\pi} (\cos x - \sin x) dx \\ &= (\sin x + \cos x) \Big|_0^{\pi/4} + (-\cos x - \sin x) \Big|_{\pi/4}^{5\pi/4} + (\sin x + \cos x) \Big|_{5\pi/4}^{2\pi} = 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

**Следствие 5.4** Нека фигурата  $F$  е криволинеен трапец. Ако съществуват краен брой точки  $\{x_i\}$ , така че  $f(x_i) = 0$ , то  $F$  е измерима фигура и има лице равно на

$$(62) \quad S = \int_a^b |f(x)| dx.$$

**Доказателство:** Прилагаме Следствие 5.3 за  $f$  и  $g(x) \equiv 0$  и получаваме (62).  $\square$

Ако положим  $b = a$  в Пример 5.4 получаваме формулата за лице на кръг  $\mu(k) = a^2\pi$  с радиус  $a$ .

**Пример 5.7** Пресметнете лицето на фигурата  $F$ , заградена от функцията  $f(x) = x(x^2 - 1)$  и правата  $y = 0$ .

Фигурата  $F$  е заградена от  $f(x)$ ,  $y = 0$  и  $x \in [-1, 1]$ . Определяме знаците на функцията  $f$  в интервала  $[-1, 1]$  и поучаваме

$$|f(x)| = \begin{cases} x(x^2 - 1), & x \in [-1, 0] \\ x(1 - x^2), & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Следователно лицето на фигурата  $F$  е

$$\begin{aligned} \mu(F) &= \int_{-1}^1 |x(x^2 - 1)| dx = \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^1 (x - x^3) dx \\ &= \left( \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^0 + \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ:

- 1) Намерете лицето на фигурата, заградена от кривите  $f(x) = 2^x$ ,  $g(x) = 2x - x^2$  и правите  $x = 0$ ,  $x = 2$ .
- 2) Намерете лицето на фигурата, заградена от параболите  $f(x) = 2x^2$ ,  $g(x) = 1 - 3x^2$ .
- 3) Намерете лицето на фигурата, заградена от кривите  $f(x) = \frac{x^2}{4}$ ,  $g(x) = \frac{8}{x^2 + 4}$ .
- 4) Намерете лицето на фигурата, заградена от параболата  $f(x) = x^2 + 1$  и правата  $g(x) = 3 - x$ .
- 5) Намерете лицето на фигурата, която се намира в първи квадрант и е заградена от кривите  $x^2 + y^2 = 3a^2$ ,  $x^2 = 2ay$  и  $y^2 = 2ax$ ,  $a > 0$ .
- 6) Намерете лицето на фигурата, която се намира в първи квадрант и е заградена от кривите  $x^2 + y^2 = 5$ ,  $x^2 = 4y$  и  $y^2 = 4x$ ,  $a > 0$ .
- 7) Намерете лицето на фигурата, заградена от кривата  $f(x) = \cos x$  и правите  $y = x + 1$ ,  $y = 0$ .
- 8) Намерете лицето на фигурата, заградена от кривата  $y^2 = x^3 - x^2$  и правата  $x = 2$ .
- 9) Намерете лицето на фигурата, заградена от кривата  $x^3 = (y - x)^2$  и правата  $x = 1$ .
- 10) Намерете лицето на фигурата, заградена от кривата  $y^2 = x(x - 1^2)$ .

### 5.3 Обем на ротационно тяло

**Определение 5.6** *Многоъгълно тяло се нарича обединението на краен брой ограничени многостени.*

Използваме означението  $\mu(P)$  за обем на многоъгълното тяло  $P$ .

**Определение 5.7** *Казваме, че многоъгълното тяло  $P$  е вписана в тялото  $F$ , ако  $P \subseteq F$ . Казваме, че многоъгълното тяло  $Q$  е описана около тялото  $F$ , ако  $Q \supseteq F$ .*

Нека  $F$  е произволно ограничено тяло (тялото  $F$  се нарича ограничено, ако се съдържа в правоъгълен паралелепипед). Съществуват точната горна граница  $\mu_*(F) = \sup\{\mu(P) : P \subseteq F\}$  и точната долна граница  $\mu^*(F) = \inf\{\mu(P) : P \subseteq F\}$ , защото  $F$  е ограничено и обемът на всяко вписано тяло е по-малък от обема на всяко описано тяло

**Определение 5.8** *Казваме, че тялото  $F$  е измеримо ако  $\mu_*(F) = \mu^*(F)$ . Числото  $\mu(F) = \mu_*(F) = \mu^*(F)$  наричаме обем на  $F$ .*

**Теорема 5.4** *Тялото  $F$  е измеримо тогава и само тогава, когато за всяко  $\varepsilon > 0$  съществуват многостенни тела  $P \subset F$  и  $Q \supset F$ , така че  $\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$ .*

Доказателството е аналогично на доказателството на Теорема 5.2.



**Теорема 5.5** Тялото  $F$  е измеримо тогава и само тогава, когато за всяко  $\varepsilon > 0$  съществуват измерими тела  $P \subset F$  и  $Q \supset F$ , така че  $\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$ .

**Теорема 5.6** Нека  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е непрекъсната функция. Тялото  $F$ , което се получава при завъртането на  $f$  около оста  $O_x$ , е измеримо и има обем  $V(F) = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ .

**Доказателство:** Да разгледаме делението  $\{x\}$  на интервала  $[a, b]$  и да означим  $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$  и  $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ . Разглеждаме правоъгълниците с височина  $m_i$  и  $M_i$  за интервала  $[x_{i-1}, x_i]$ . При завъртането на  $f$  около  $O_x$  получаваме две измерими тела  $P \subseteq F \subseteq Q$ . От равенствата

$$\mu(P) = \pi \sum_{i=1}^n m_i^2 \Delta x_i, \quad \mu(Q) = \pi \sum_{i=1}^n M_i^2 \Delta x_i$$

следва, че обемите на  $P$  и  $Q$  са голямата и малката сума за функцията  $g(x) = \pi f^2(x)$ . От интегрируемостта на  $\pi f^2$  следва, че за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува деление, така че  $S(g) - s(g) < \varepsilon$  и според Теорема 5.5 тялото  $F$  е измеримо и има обем  $V(F) = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ .  $\square$

**Пример 5.8** Намерете обема на кълбо с радиус  $r$ .

Да разгледаме полуокръжността  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ ,  $x \in [-r, r]$ . Кълбо с радиус  $r$  се получава след завъртане около оста  $O_x$  на кривата  $f$ . Според Теорема 5.6 обемът на полученото тяло е равен на

$$V = \pi \int_{-r}^r f^2(x) dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left( r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-r}^r = \pi (2r^3 - \frac{2}{3}r^3) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

**Следствие 5.5** Нека  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  са непрекъснати функции и  $0 \leq f(x) \leq g(x)$ . Тялото  $F$ , което се получава при завъртането на криволинейния трапец, определен от  $f, g, x = a$  и  $x = b$  около оста  $O_x$ , е измеримо и има обем  $V(F) = \pi \int_a^b (g^2(x) - f^2(x)) dx$ .

Доказателството на Следствие 5.5 е аналогично на доказателството на Следствие 5.2.

**Пример 5.9** Намерете обемите на телата получени при ротация около оста  $O_x$  или  $O_y$  на фигурата заградена то кривите  $f(x) = x^2$  и  $g(x) = 2\sqrt{2x}$ .

Решенията  $(0, 0)$  и  $(2, 4)$  на системата

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = 2\sqrt{2x} \end{cases}$$

са координатите на пресечните точки на кривите  $f$  и  $g$ . Съгласно Следствие 5.5 обемът при ротация около  $O_x$  е равен на

$$V_x = \pi \int_0^2 (8x - x^4) dx = \pi \left( 4x^2 - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \frac{48}{5} \pi$$

и обемът при ротация около  $O_y$  е равен на

$$V_y = \pi \int_0^4 \left( y - \frac{y^4}{64} \right)^2 dy = \pi \left( \frac{y^2}{2} - \frac{y^5}{320} \right) \Big|_0^4 = \frac{24}{5} \pi.$$

Нека тялото  $F$  се получава при ротацията на фигурата  $A$ , която е ограничена от функциите  $g(x)$ ,  $f(x)$  и правите  $x = a$ ,  $x = b$ . Ако съществуват краен брой точки  $\{x_i\}$ , така че  $f(x_i) = g(x_i)$ , то аналогично на Следствие 5.3 за обема на  $F$  се получава формулата

$$V(F) = \pi \int_a^b |g^2(x) - f^2(x)| dx.$$

**ЗАДАЧИ:**

- 1) Намерете обема на тяло, получено при ротация около оста  $O_x$  на фигурата, заградена от  $f(x) = x^2$ ,  $x = 0$ ,  $x = p$ .
- 2) Намерете обема на тяло, получено при ротация около оста  $O_x$  на фигурата, заградена от  $f(x) = e^x$ ,  $x = -1$ ,  $x = 1$ .
- 3) Намерете обема на тяло, получено при ротация около оста  $O_x$  на фигурата, заградена от  $f(x) = \sin x$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2\pi$ .
- 4) Намерете обема на тяло, получено при ротация около оста  $O_x$  на фигурата, заградена от  $f(x) = x^2 + x + 1$ ,  $g(x) = x + 1$ .
- 5) Намерете обема на тяло, получено при ротация около оста  $O_x$  на фигурата, заградена от  $f(x) = \sin x$ ,  $\cos x$   $x = 0$ ,  $x = 2\pi$ .

#### 5.4 Околна повърхнина на ротационно тяло

Да разгледаме функцията  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , която има непрекъсната първа производна. Нека разгледаме тялото  $F$ , получено при ротация на кривата  $f$  около оста  $O_x$ . Казваме, че тялото  $F$  има околна повърхнина, ако съвкупността от лицата на околните повърхнини на всички ротационни фигури, които са получени при ротацията на всяка начупена линия с върхове върху  $f$  около оста  $O_x$  е ограничено отгоре. Точната горна граница на тези лица наричаме околна повърхнина на  $F$ . Аналогично на твърденията за ректифецерируеми криви получаваме, че добавянето на възли увеличава околната повърхнина и ако функцията  $f$  е непрекъсната, то множеството от лица е ограничено отгоре. В сила е резултат, който се доказва аналогично на Теорема 5.1.

**Теорема 5.7** Нека  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  има непрекъсната първа производна. Тялото  $F$ , получено при ротацията на кривата  $f$  около оста  $O_x$  има околна повърхнина

$$S(F) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

**Доказателство:** Нека  $\{x\}$  е деление на интервала  $[a, b]$ . Разглеждаме начупената линия  $\ell = \{\ell_i\}$ , състояща се от отсечките  $\ell_i$  с краища  $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$  и  $(x_i, f(x_i))$ . Околната повърхнина на тялото, получено при завъртане на отсечката  $\ell_i$  около оста  $O_x$  е равна на  $2\pi \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} |\ell_i|$ , където с  $|\ell_i|$  сме означили дължината на отсечката  $\ell_i$ . Площта на тялото, получено при ротацията на начупената линия  $\ell$  е равна на

$$2\pi \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} |\ell_i| = 2\pi \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) |\ell_i| + \pi \sum_{i=1}^n (f(x_i) + f(x_{i-1})) |\ell_i|.$$

От непрекъснатостта на  $f$  следва, че  $f$  е равномерно непрекъсната в интервала  $[a, b]$ . Тогава за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува  $\delta > 0$ , така че  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  за всеки  $x, y \in [a, b]$ , такива че  $|x - y| < \delta$ . Тогава ако изберем делението  $\{x\}$  да бъде с диаметър по-малък от  $\delta$  получаваме

$$\left| \pi \sum_{i=1}^n (f(x_i) + f(x_{i-1})) |\ell_i| \right| = \pi \sum_{i=1}^n |f(x_i) + f(x_{i-1})| |\ell_i| < \varepsilon \pi \sum_{i=1}^n |\ell_i| = \varepsilon \pi |\ell|.$$

Следователно горната сума клони към нула, когато диаметърът на делението  $\{x\}$  клони към нула.

Нека означим  $|s_i|$  дължината на участъка на кривата  $f$ , заключена между точките  $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$  и  $(x_i, f(x_i))$ . Тогава

$$2\pi \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) |\ell_i| = 2\pi \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) |s_i| - 2\pi \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) ||s_i| - |\ell_i||.$$

От непрекъснатостта на  $f$  следва, че съществува  $M$ , така че  $|f(x_i)| \leq M$  за всяко  $i = 1, 2, \dots, n$ . Тогава

$$\left| 2\pi \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) ||s_i| - |\ell_i|| \right| \leq 2\pi M \sum_{i=1}^n ||s_i| - |\ell_i|| = 2\pi M \left( \sum_{i=1}^n |s_i| - \sum_{i=1}^n |\ell_i| \right).$$

От непрекъснатостта на функцията  $f$  следва, че  $\sum_{i=1}^n |s_i| - \sum_{i=1}^n |\ell_i|$  клони към нула, когато диаметърът на делението  $\{x\}$  клони към нула.

От (56) получаваме, че съществуват  $\xi \in [x_{i-1}, x_i]$ , така че

$$\begin{aligned} 2\pi \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) |s_i| &= 2\pi \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta_i \\ &= 2\pi \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta_i + 2\pi \sum_{i=1}^n (f(x_{i-1}) - f(\xi_i)) \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta_i, \end{aligned}$$

където  $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$ .

От непрекъснатостта на  $f$  следва, че за всяко  $\varepsilon$  съществува  $\delta > 0$ , така че  $|f(x_{i-1}) - f(\xi_i)| < \varepsilon$  за всяко деление с диаметър по-малък от  $\delta$ . Тогава получаваме

$$\left| 2\pi \sum_{i=1}^n f(x_{i-1} - \xi_i) \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot \Delta_i \right| \leq 2\pi\varepsilon \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot \Delta_i < C\varepsilon \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Следователно сумата  $2\pi \sum_{i=1}^n f(x_{i-1} - \xi_i) \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot \Delta_i$  клони към нула при диаметър на делението  $\{x\}$ , клонящ към нула.

При диаметър на делението  $\{x\}$ , клонящ към нула сумата  $2\pi \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot \Delta_i$  клони към интеграла  $2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ .  $\square$

**Пример 5.10** Определете околната повърхнина на кълбо с радиус  $r$ .

Кълбо с радиус  $r$  се получава при ротация на кривата  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} : [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}$  около оста  $O_x$ . Според Теорема 5.7 околната повърхнина на полученото тяло е

$$S(f) = 2\pi \int_{-r}^r f(x) \sqrt{1 + \left( (\sqrt{r^2 - x^2})' \right)^2} dx = 2\pi r \int_{-r}^r dx = 2\pi r^2.$$

**Задачи:**

- 1) Намерете околната повърхнина на тяло, получено при ротация около оста  $O_x$  на фигурата, заградена от  $f(x) = x^2$ ,  $x = 0$ ,  $x = p$ .
- 2) Намерете околната повърхнина на тяло, получено при ротация около оста  $O_x$  на фигурата, заградена от  $f(x) = e^x$ ,  $x = -1$ ,  $x = 1$ .
- 3) Намерете околната повърхнина на тяло, получено при ротация около оста  $O_x$  на фигурата, заградена от  $f(x) = \sin x$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2\pi$ .

## 6 Приложение на определения интеграл във физиката

Преди да илюстрираме приложението на определения интеграл във физиката ще обясним общата схема за извеждане на закони с използването на определен интеграл. Да разгледаме задачата за определяне на константата  $Q$ , която е свързана променлива от интервала  $[a, b]$ . Предполагаме, че за интервала  $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$  отговаря част от стойността на  $Q$ , която да означим с  $Q([\alpha, \beta])$ , така че на всяко деление  $\{x\}$  на интервала  $[a, b]$  съответства разлагане на стойността на  $Q$ . Да наложим изискването за адитивност на стойността на константата  $Q$ , т.е. ако  $a \leq \alpha \leq \gamma \leq \beta \leq b$ , то е изпълнено равенството  $Q([\alpha, \beta]) = Q([\alpha, \gamma]) + Q([\gamma, \beta])$ . Като пример да разгледаме  $Q$  да бъде дължината на кривата  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  или лицето на криволинейния трапец  $f$ ,  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = 0$ . Разглеждаме частта  $\Delta Q$ , която отговаря на частта от делението  $[x, x + \Delta x]$ . Търсим приближена стойност на  $\Delta Q$  във вида  $q(x)\Delta x$ , която е линейна спрямо нарастването  $\Delta x$ . Казано с други думи търсим представяне

$$\Delta Q = q(x)\Delta x + o(\Delta x).$$

Ако  $Q$  е дължината на кривата  $f$ , то  $\Delta Q$  описва дължината на кривата  $f : [x, \Delta x] \rightarrow \mathbb{R}$ . Заместваме дължината на кривата при  $t \in [x, \Delta x]$  със стойността  $\sqrt{1 + (f'(t))^2}\Delta x$ . Ако  $Q$  е лицето на криволинейен трапец, то заместваме  $\Delta Q$  с  $f(x)\Delta x$ . В двата случая е изпълнено  $\Delta Q - \sqrt{1 + (f'(t))^2}\Delta x = o(\Delta x)$  и  $\Delta Q - f(x)\Delta x = o(\Delta x)$ . От адитивността на  $Q$  следва, че на всяко деление  $\{x\}$  на интервала  $[a, b]$  съответства

$$(63) \quad Q = \sum \Delta Q \sim \sum_{i=1}^n q(x_i)\Delta x_i.$$

Точността на представянето (63) се увеличава с намаляване на диаметъра на делението  $\{x\}$  и следователно е изпълнено равенството

$$(64) \quad Q = \sum \Delta Q = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n q(x_i)\Delta x_i = \int_a^b q(x)dx.$$

Основният момент при намирането на закони, които да свързват търсена константа с определен (Риманов) интеграл е да се намери линейно спрямо  $\Delta x$  приближение на  $\Delta Q$ . Заместването на сумите с интеграл унищожава грешката, която се генерира при линейното приближение.

### 6.1 Статичен момент и център на тежестта на крива

Ще припомним:

- 1) Статичният момент  $M$  на материална точка с маса  $m$ , която се намира на разстояние  $d$  от дадена права е равен на  $M = md$ .
- 2) Статичният момент  $M$  на  $n$  материални точки с маси  $m_i$ , всяка от които се намира на

разстояние  $d_i$  от дадена права е равен на  $M = \sum_{i=1}^n m_i d_i$ . Използваме уговорката, че  $d_i$  имат един и същи знак за точките, които се намират в една и съща полуравнина, определена от правата и имат различни знаци за точките, които се намират в различни полуравнина определени от правата.

Да разгледаме случай, в който точките не са разположени дискретно, а запълват цяла непрекъсната крива  $\ell$ , която е дефинирана с функцията  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Допълнително ще предположим, че кривата е еднородна, т.е. има еднаква плътност  $\rho$ . Без да намаляваме общността на разглежданията можем да приемем, че  $\rho = 1$ . От това предположение следва, че масата на всяка дъга от кривата се изменя с промяната на дължината на дъгата.

Да разгледаме произволна дъга от кривата, отговаряща на  $[x, \Delta x]$ . Тази дъга се намира приблизително на разстояние  $f(x)$  от оста  $O_x$ . Тогава е в сила приближената формула

$$\Delta M = f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \Delta x.$$

След сумиране и граничен преход получаваме  $M_x = \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ . Аналогично статичният момент на кривата спрямо оста  $O_y$  е равен на

$$M_y = \int_a^b f^{-1}(y) \sqrt{1 + ((f^{-1})'(y))^2} dy.$$

Статичните моменти  $M_x$  и  $M_y$  позволяват лесно да се намира центърът на тежестта на даден обект. От факта, че координатите на центъра на тежестта  $G(\alpha, \beta)$  удовлетворяват условието „ако цялата маса на тялото (кривата) е съсредоточена в точката  $G$ , то статичният момент на  $G$  съвпада със статичния момент на тялото (кривата)“. От предварителните условия за кривата да бъде еднородна с плътност  $\rho = 1$  следва, че масата на кривата  $m$  е равна на нейната дължина  $|\ell|$ . Следователно получаваме уравненията

$$\alpha m = \alpha |\ell| = \alpha \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = M_y = \int_a^b f^{-1}(y) \sqrt{1 + ((f^{-1})'(y))^2} dy$$

$$\beta m = \beta |\ell| = \beta \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = M_x = \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

и намираме координатите на центъра а тежестта

$$(65) \quad \alpha = \frac{\int_a^b f^{-1}(y) \sqrt{1 + ((f^{-1})'(y))^2} dy}{|\ell|}$$

$$\beta = \frac{\int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}{|\ell|}.$$

От (65) получаваме равенството

$$2\pi\beta|\ell| = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

и закона на Пап–Гулдин:

**Теорема 6.1** (*Pappus–Guldin*) Околната повърхнина на фигура, получена при ротация на крива около непресичаща я ос е равна на дължината на кривата умножена с дължината на окръжността, която описва центърът на тежестта на фигурата.

Наистина съгласно Теорема 5.7 и (65) получаваме следното равенство за околната повърхнина

$$S(F) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi\beta|\ell|,$$

където  $2\pi\beta$  е лицето на кръга, който се описва от центъра на тежестта, а  $|\ell|$  е дължината на кривата.

**Пример 6.1** Намерете статичния момент и центъра на тежестта на кривата  $f(x) = x^2$ , в интервала  $[0, 1]$  спрямо координатните оси.

Пресмятаме последователно  $f'(x) = 2x$ ,  $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ ,  $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ . Статичните моменти спрямо осите  $O_x$  и  $O_y$  са съответно

$$M_x = \int_0^1 x^2 \sqrt{1 + 4x^2} dx \approx 0.61$$

и

$$M_y = \int_0^1 \sqrt{y} \sqrt{1 + \frac{1}{4y}} dy \approx 0.85.$$

Дължината на параболата е  $|\ell| = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx \approx 1,48$ . Центърът на тежестта за параболата има координати  $\alpha = \frac{M_y}{|\ell|} \approx 0,58$  и  $\beta = \frac{M_x}{|\ell|} \approx 0,41$ .

## 6.2 Статичен момент и център на тежестта на криволинеен трапец

Да разгледаме криволинейния трапец, определен от  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = 0$ . Предполагаме, че масата е равномерно разпределена върху целия криволинеен трапец, т.е. има една и съща плътност  $\rho$ . Без да се намалява общността на разглежданията можем да приемем  $\rho = 1$ . Ще определим статичните моменти  $M_x$  и  $M_y$  спрямо координатните оси  $O_x$  и  $O_y$ . Да разгледаме деление  $\{x\}$  на интервала  $[a, b]$ . Можем да приемем, че криволинейният трапец  $x_i x_{i+1} f(x_{i+1}) f(x_i)$  е близък до правоъгълник и да приближим лицето му с  $f(x_i) \Delta x_i$ . От равномерната плътност на криволинейния трапец следва, че можем да приемем, че центърът на тежестта се намира в центъра на правоъгълника, който апроксимира  $x_i x_{i+1} f(x_{i+1}) f(x_i)$ . Центърът на правоъгълника се намира на разстояние  $\frac{f(x)}{2}$  от  $O_x$  и  $x + \frac{\Delta x_i}{2}$  от  $O_y$ . Тогава от формулите за статичните моменти получаваме

$$\Delta M_x = m_i d_i = f(x) \cdot \Delta x \frac{f(x)}{2} = \frac{(f(x))^2 \Delta x}{2}$$

и

$$\Delta M_y = m_i d_i = f(x) \cdot \Delta x \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) = f(x)x\Delta x + o(\Delta x) = f(x)x\Delta x$$

и след сумиране и граничен преход получаваме формулите

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b (f(x))^2 dx$$

и

$$M_y = \int_a^b x f(x) dx.$$

Аналогично на случая на крива и при равнинна фигура координатите на центъра на тежестта  $G(\alpha, \beta)$  удовлетворяват уравненията

$$\alpha \int_a^b f(x) dx = M_y = \int_a^b x f(x) dx$$

$$\beta \int_a^b f(x) dx = M_x = \frac{1}{2} \int_a^b (f(x))^2 dx$$

и намираме координатите на центъра на тежестта

$$(66) \quad \alpha = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{S}$$

$$(67) \quad \beta = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b (f(x))^2 dx}{2S},$$

където  $S$  е лицето на криволинейният трапец.

Равенство (67) е еквивалентно на

$$(68) \quad 2\pi S\beta = \pi \int_a^v (f(x))^2 dx,$$

където  $S$  е лицето на криволинейния трапец,  $\beta$  е координатата по оста  $O_y$  на центъра на тежестта на криволинейния трапец, а от дясната страна на равенството е формулата за обема на ротационното тяло, получено при завъртането на  $f$  около оста  $O_x$ . От (67) получаваме закона на Пап–Гулдин:

**Теорема 6.2** (*Pappus – Guldin*) *Обемът на тяло, което е получено при ротация на фигура  $f$  около ос, която не пресича  $f$  е равен на произведението от лицето на  $f$  и дължината на окръжността, която се описва при въртенето от центъра на тежестта на  $f$ :*

$$V = S \cdot 2\pi\beta$$



Лесно се съобразява, че ако разгледаме криволинейния трапец  $g(x) \leq f(x)$ ,  $x = a$ ,  $x = b$  са в сила формулите за статичните моменти

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b ((g(x))^2 - (f(x))^2) dx, \quad M_y = \int_a^b x (g(x) - f(x)) dx.$$

**Пример 6.2** Намерете статичния момент и центъра на тежестта на криволинейния трапец  $f(x) = x^2$ ,  $x = 0$ ,  $x = b$  и  $y = 0$ .

Статичните моменти спрямо осите  $O_x$  и  $O_y$  са съответно

$$M_x = \frac{1}{2} \int_0^b x^4 dx = \frac{b^5}{10}$$

и

$$M_y = \int_0^b x^3 dx = \frac{b^4}{4}.$$

Лицето на криволинейния трапец е  $S = \int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}$ . Центърът на тежестта на криволинейния трапец има координати  $\alpha = \frac{M_y}{S} = \frac{3b}{4}$  и  $\beta = \frac{M_x}{S} = \frac{10b^2}{3}$ .

**Пример 6.3** Намерете центъра на тежестта на полукръг с радиус  $r$ .

Без да намаляваме общността на разглежданията можем да приемем, че центърът на кръга съвпада с координатното начало. Да разгледаме полукръга, който се намира в първи и втори квадрант. Кривата, която определя полукръга е  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ ,  $x \in [-r, r]$ . Пресмятаме статичните моменти спрямо осите  $O_x$  и  $O_y$ .

$$M_x = \int_{-r}^r x \sqrt{r^2 - x^2} dx = 0$$

и

$$M_y = \frac{1}{2} \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2}) dx = \frac{2r^3}{3}.$$

Лицето на полукръга е  $S = \frac{\pi r^2}{2}$ . Центърът на тежестта  $G(\alpha, \beta)$  на полукръга има координати  $\alpha = \frac{M_y}{S} = \frac{4r}{3\pi}$  и  $\beta = \frac{M_x}{S} = 0$ .

**Пример 6.4** Намерете центъра на тежестта на фигурата, оградена от  $f(x) = \cos x$ ,  $x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$  и  $y = 0$ .

Пресмятаме статичните моменти спрямо осите  $O_x$  и  $O_y$ .

$$M_x = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{8}$$

и

$$M_y = \int_0^{\pi/2} x \cos x dx = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Лицето на фигурата е  $S = 1$ . Центърът на тежестта  $G(\alpha, \beta)$  на полукръга има координати  $\alpha = \frac{My}{S} = \frac{\pi}{2} - 1$  и  $\beta = \frac{Mx}{S} = \frac{\pi}{8}$ .

**Пример 6.5** Намерете центъра на тежестта на фигурата, оградена от кривите  $f(x) = x$  и  $f(x) = x^2$ .

Пресмятаме статичните моменти спрямо осите  $O_x$  и  $O_y$ .

$$M_x = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \frac{1}{15}$$

и

$$M_y = \int_0^1 x(x - x^2) dx = \frac{1}{12}.$$

Лицето на фигурата е  $S = \frac{1}{6}$ . Центърът на тежестта  $G(\alpha, \beta)$  на фигурата има координати  $\alpha = \frac{My}{S} = \frac{1}{2}$  и  $\beta = \frac{Mx}{S} = \frac{2}{5}$ .

### 6.3 Хидростатично налягане

Добре известен е фактът, че колкото по-дълбоко се намира обект в морето, толкова по-голямо е налягането върху него. Да разгледаме хоризонтална плочка с лице  $S$ , която е потопена във флуид с плътност  $\rho$  на  $d$ -метра дълбочина. Обемът на флуида, намиращ се над плочката е  $V = Sd$  и има маса  $m = \rho V = \rho Sd$ . Следователно силата, с която флуида действа върху плочката е  $F = mg = \rho g Sd$ . Налягането върху всяка точка от плочката е  $P = \frac{F}{S} = \rho g d$ .

Важен закон на налягането при флуидите е, че във всяка точка на флуида налягането е едно и също във всички посоки. Следователно налягането на дълбочина  $d$  във всички посоки е  $P = \rho g d$ .

Да разгледаме язовирна стена с формата на равнобедрен трапец, който има размери - долна основа 30, горна основа 50 и височина 20. Ако водата е с дълбочина 16, пресметнете налягането, което упражнява водата върху стената. Нека разгледаме деление  $\{x\}$ ,  $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 16$  на отсечката, която описва височината на водния стълб  $[0, 16]$ . Нека изберем произволни  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ . Пресмятаме лицето на трапеца, който отговаря на

делението  $\Delta x_i = [x_{i-1}, x_i]$ , като го апроксимираме с лице на правоъгълник  $A_i$  с размери  $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$  и  $w_i = 46 - \xi_i$ . За пресмятането на  $w_i$  използваме подобни триъгълници. Лицето на  $A_i$  е равно на  $(46 - \xi_i)\Delta_i$ . Налягането, което упражнява флуида върху ивицата  $A_i$  е приблизително константа върху цялата ивица и можем да го заместим с  $P_i = \rho g x_i$ . Хидростатичното налягане се апроксимира с

$$\Delta F = P_i S(A_i) = \rho g \xi_i (46 - x_i) \Delta_i.$$

След сумиране по  $i$  и граничен преход получаваме формулата

$$F = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho g \xi_i (46 - x_i) \Delta_i = \int_0^{16} \rho g x (46 - x) dx \approx 4523 \rho g.$$

Плътността на водата е 1000 и земното притегляне е 9,8. Тогава получаваме  $F \approx 4,43 \cdot 10^7$ .

#### 6.4 Количество изтичаща вода през шлюз на язовирна стена

Нека разгледаме язовирна стена с шлюз с правоъгълна форма, който има ширина  $b$ . Нека водата е на височина  $h$  от основата на шлюза и  $h_0$  е височината от горната страна на шлюза. Пресметнете обема вода, който изтича през шлюза за една секунда.

Скоростта, с която изтича водата, която се намира на разстояние  $h_1$  от върха на шлюза е  $v = \sqrt{2gh}$ . Да разделим височината на водата над шлюза на интервали с равни дължини  $\Delta x$ . За всеки сегмент приблизителната скорост на водата е  $v = \sqrt{2g\xi_1}$ . Водата изтича с тази скорост през правоъгълник с размери  $\Delta x$  и  $b$ . Следователно количеството вода, което ще изтече през това деление е  $\Delta Q = b\sqrt{2g\xi_1}\Delta x$ . След сумиране и граничен преход по  $\Delta x \rightarrow 0$  получаваме формулата

$$(69) \quad Q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n b\sqrt{2g\xi_i}\Delta x = b\sqrt{2g} \int_{h_0}^h \sqrt{x} dx = \frac{2b\sqrt{2g}}{3} (h^{3/2} - h_0^{3/2}).$$

В действителност количеството изтичаща вода в секунда е малко по-малко, защото във формулата не сме отчели триенето на потока вода в стените на шлюза. Във физиката опитно, за различните материали се определя коефициент  $0 < \mu < 1$  и тогава формула (69) придобива вида

$$Q = \mu \frac{2b\sqrt{2g}}{3} (h^{3/2} - h_0^{3/2}).$$

Ако  $h_0 = 0$  се получава случая за количеството вода преминаващо през водопад

$$Q = \mu \frac{2b\sqrt{2g}}{3} h^{3/2}.$$

## 6.5 Консуматорски излишък

Нека  $p = p(x)$  е функцията на търсене на дадена стока. Това е цената, която фирмата изисква за продажбата на  $x$  единици. Естествено предположение е, че колкото повече са единиците стока  $x$  толкова по-ниска е цената  $p(x)$ . Ако в момента се продава количество  $X$  от стоката, то можем да разгледаме деление на интервала  $[0, X]$ . Нека разделим интервала  $[0, X]$  на равни части  $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = X$  с дължина  $\Delta x$ . Правоъгълникът с размери  $[x_{i-1}, x_i]$  и  $p(x_i)$  показва цената, която би платил купувач, ако на пазара се предлагала само  $x_i$  на брой единици от стоката. Следователно, ако купувачът купи  $\Delta x$  бройки на цена  $P = p(X) < p(x_i)$ , то печалбата му ще бъде  $\Delta Q = (p(x_i) - P) \Delta x$ . След сумиране по  $i$  и граничен преход получаваме

$$Q = \int_0^X (p(x) - P) dx$$

Величината  $Q$  се нарича консуматорски излишък.

Консуматорският излишък представлява количеството пари, които купувачите биха спестили, ако купят стоката на цена  $P$ , а не на цената  $p(x)$ , която те самите биха били склонни да платят.

**Пример 6.6** Ако функцията на търсене е  $p(x) = 1200 - \frac{x}{5} - \frac{x^2}{10000}$ , намерете консуматорския излишък при продажно ниво  $X = 500$

Пресмятаме  $p(500) = 1200 - \frac{500}{5} - \frac{500^2}{10000} = 1075$  и консуматорския излишък

$$Q = \int_0^{500} (p(x) - P) dx \approx 33333,33.$$

## 6.6 Кръвен поток

Скоростта, с която се движи кръвта по кръвоносните съдове се задава с формулата

$$v(r) = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2),$$

където  $R$  е радиусът на кръвоносния съд,  $l$  е дължината му,  $r$  е разстоянието до централната ос на кръвоносния съд и  $\eta$  е вискозитета на кръвта. Да разделим радиуса на интервали  $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = R$  с дължина  $\Delta x$ . Получаваме пръстени с дебелина  $\Delta x$ , по които кръвта се движи с еднаква скорост. Следователно обемът кръв, който протича през всеки един от тези пръстени е  $\Delta V = 2\pi x_i \Delta x \cdot v(x_i)$ . Сумираме, извършваме граничен преход и получаваме

$$V = \int_0^R \frac{2\pi x P}{4\eta l}(R^2 - x^2) dx = \frac{\pi P R^4}{8\eta l}.$$